



Escola Tècnica Superior d'Enginyeria  
de Telecomunicació de Barcelona

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

# PROJECTE FI DE CARRERA

**TÍTOL:** MODELITZACIÓ ANALÍTICA I EXPERIMENTAL D'UN HELICÒPTER  
DE LABORATORI

MODELIZACIÓN ANALÍTICA Y EXPERIMENTAL DE UN  
HELICÓPTERO DE LABORATORIO

ANALYTICAL AND EXPERIMENTAL MODELLING OF A  
LABORATORY HELICOPTER.

**AUTOR:** ANTONI HERNÁNDEZ BONET

**TITULACIÓ:** ENGINYERIA DE TELECOMUNICACIÓ

**DIRECTORA:** ROSA MARIA FERNÁNDEZ CANTÍ

**DEPARTAMENT:** TEORIA DEL SENYAL I COMUNICACIONS (TSC)

**DATA:** GENER 2012



Als meus pares, Cati i Antonio,  
perquè aquesta és la collita  
que avui recullen amb orgull  
després d'haver sembrat amb tanta  
dedicació, paciència i amor;

a la padrina, Catalina, *in memoriam*;

a la iaia, Catalina;

i al professor Jaume Herranz, *in memoriam*;



## Resum del projecte

En aquest projecte es documenta detalladament el procés de construcció d'un model no lineal del *Twin Rotor MIMO System* (TRMS), un helicòpter de laboratori de la casa Feedback Instruments Ltd. Àmpliament reconegut com a vàlid per fer experiments d'identificació i disseny de controladors, el TRMS és una planta de referència en l'àmbit de l'enginyeria de control gràcies a les seves característiques. Aquest prototip constitueix un complex sistema de dues entrades i dues sortides fortament acoblades entre sí, amb un comportament no lineal i totalment depenent de les condicions inicials, que el fan desestabilitzar fàcilment i que converteixen la identificació del seu model dinàmic en tot un repte. Tot i que molts investigadors han desenvolupat diferents models del TRMS, cap d'aquests, ni els proposats pel fabricant, s'ajusten a l'equip del nostre laboratori, fet pel qual s'ha fet patent la necessitat de construir-ne un de propi.

En primer lloc, es realitza un estudi divulgatiu del funcionament dels helicòpters reals per tal de posar en context aquest projecte i presentar els aspectes dinàmics més importants que després són tractats al llarg del projecte. Tot seguit, es descriu detalladament el prototip de laboratori i es modelitza rigorosament el seu comportament dinàmic a partir dels principis bàsics de la física, en concret, aplicant les lleis de Newton per a la rotació. Posteriorment, un cop obtingudes les relacions analítiques que descriuen el moviment de l'aparell, s'estimen i s'ajusten mitjançant dades experimentals els valors de diversos paràmetres clau a fi d'harmonitzar les equacions analítiques a la realitat del nostre TRMS. Per dur a terme aquesta identificació experimental es consideren i comparen diversos mètodes numèrics, en especial el de Levenberg-Marquardt i el *Pattern search*. Finalment, es valida el model obtingut aplicant diferents criteris de validació i es mostra la seva bondat a través de diversos resultats experimentals..



## Resumen del proyecto

En este proyecto se documenta detalladamente el proceso de construcción de un modelo no lineal del *Twin Rotor MIMO System* (TRMS), un helicóptero de laboratorio de la casa Feedback Instruments Ltd. Ampliamente reconocido como válido para realizar experimentos de identificación y diseño de controladores, el TRMS es una planta de referencia en el ámbito de la ingeniería de control gracias a sus características. Este prototipo constituye un complejo sistema de dos entradas y dos salidas fuertemente acopladas entre sí, con un comportamiento no lineal y totalmente dependiente de las condiciones iniciales, que lo hacen desestabilizar fácilmente y que convierten la identificación de su modelo dinámico en todo un reto. Aun cuando muchos investigadores han desarrollado diferentes modelos del TRMS, ninguno de ellos, ni los propuestos por el fabricante, se ajustan al equipo de nuestro laboratorio, hecho por el cual se evidencia la necesidad de construir uno propio.

En primer lugar, se realiza un estudio divulgativo del funcionamiento de los helicópteros reales para contextualizar este proyecto y presentar los aspectos dinámicos más importantes que después son tratados a lo largo del proyecto. Acto seguido, se describe detalladamente el prototipo de laboratorio y se modeliza rigurosamente su comportamiento dinámico a partir de los principios básicos de la física, en concreto, aplicando las leyes de Newton para la rotación. Posteriormente, una vez obtenidas las relaciones analíticas que describen el movimiento del aparato, se estiman y se ajustan mediante datos experimentales los valores de varios parámetros clave para armonizar las ecuaciones analíticas a la realidad de nuestro TRMS. Para llevar a cabo esta identificación experimental se consideran y comparan varios métodos numéricos, en especial el de Levenberg-Marquardt y el *Pattern search*. Finalmente, se valida el modelo obtenido aplicando diferentes criterios de validación y se muestra su bondad a través de varios resultados experimentales.





## **Abstract**

This project documents the detailed process of building a nonlinear model of the Twin Rotor MIMO System (TRMS), a laboratory helicopter by Feedback Instruments Ltd. In the field of control engineering the TRMS is a benchmark prototype used for identification experiments and controller designs. The TRMS is a complex system of two strongly coupled inputs and outputs with nonlinear behavior, which are totally dependent on the initial conditions. Such features make for easy destabilization and turn the dynamic model identification into a considerable challenge. Although numerous researchers have developed diverse models of the TRMS, neither their models nor those provided by the manufacturer fit our laboratory equipment, a fact that shows the need for building our own model.

The present thesis begins with an informative explanation of how real helicopters work, in order to contextualize our project and present the most important dynamic aspects dealt with. Then the laboratory prototype is described in detail and the dynamic behavior of the TRMS is modeled rigorously from the first principles of physics, in particular, by applying Newton's laws for rotation. Later, after obtaining the analytical relations describing the motion of the device, the values of some key parameters are estimated and fitted to harmonize the analytical equations to the reality of our TRMS. To carry out this experimental identification, several numerical methods, especially the Levenberg-Marquardt and the pattern search methods, are considered and compared. Finally, the model obtained is judged by applying various validation criteria and its validity is shown by several experimental results.



# Continguts

<b>Capítol 1. Introducció .....</b>	<b>1</b>
1.1. Motivació .....	1
1.2. Objectius .....	2
1.3. Antecedents .....	2
1.4. Estat de la qüestió .....	3
1.5. Organització de la memòria .....	4
 <b>Capítol 2. Dinàmica dels helicòpters .....</b>	 <b>5</b>
2.1. Introducció .....	5
2.2. Conceptes bàsics .....	6
2.2.1. Aerodinàmica .....	6
2.2.2. Forces que intervenen en el vol.....	7
2.2.3. Moviments de les pales d'un helicòpter .....	9
2.3. Aerodinàmica del vol.....	10
2.3.1. Rotor principal .....	10
2.3.2. Rotor de cua .....	11
2.3.3. Vol endavant .....	12
2.4. Tipus de rotors principals.....	15
2.5. Comandaments d'un helicòpter.....	16
2.5.1. Control de pas col·lectiu .....	16
2.5.2. Control de gasos .....	17
2.5.3. Pedals antiparell .....	17
2.5.4. Control de pas cíclic.....	18
2.6. Estabilitat i moviments d'un helicòpter.....	20
 <b>Capítol 3. Modelització analítica del TRMS .....</b>	 <b>23</b>
3.1. Descripció de l'equip.....	23
3.1.1. Unitat mecànica.....	24

3.1.2.	Unitat elèctrica .....	26
3.1.3.	Unitat de control i captura.....	26
3.1.4.	Muntatge del TRMS .....	28
3.1.5.	El TRMS: un helicòpter simplificat .....	29
<b>3.2.</b>	<b>Estratègia de modelització .....</b>	<b>30</b>
3.2.1.	Justificació del model newtonià.....	30
3.2.2.	Diagrama de blocs general.....	30
<b>3.3.</b>	<b>Modelització del circuit d'interfície .....</b>	<b>31</b>
<b>3.4.</b>	<b>Modelització dels motors de corrent continu.....</b>	<b>32</b>
3.4.1.	Propietats elèctriques d'un motor CC .....	32
3.4.2.	Propietats mecàniques d'un motor CC.....	35
3.4.3.	Els motors del TRMS .....	37
3.4.4.	Tacòmetres.....	37
<b>3.5.</b>	<b>Conceptes bàsics de mecànica rotacional i sistemes de referència.....</b>	<b>38</b>
3.5.1.	Conceptes bàsics de mecànica rotacional .....	38
3.5.2.	Sistemes de referència en el TRMS i forces fictícies.....	39
<b>3.6.</b>	<b>Dinàmica del TRMS .....</b>	<b>42</b>
<b>3.7.</b>	<b>Dinàmica en el pla vertical.....</b>	<b>42</b>
3.7.1.	Moments de força en el pla vertical .....	43
3.7.2.	Moments d'inèrcia en el pla vertical.....	52
3.7.3.	Comportament dinàmic en el pla vertical .....	53
<b>3.8.</b>	<b>Dinàmica en el pla horitzontal .....</b>	<b>53</b>
3.8.1.	Moments de força en el pla horitzontal.....	53
3.8.2.	Moments d'inèrcia en el pla horitzontal.....	56
3.8.3.	Comportament dinàmic en el pla horitzontal .....	57
<b>3.9.</b>	<b>Model complet: integració dels submodels.....</b>	<b>57</b>
3.9.1.	Equacions en l'espai d'estat.....	57
3.9.2.	Diagrama de blocs SIMULINK .....	59
<b>Capítol 4.</b>	<b>Identificació experimental i ajust de paràmetres .....</b>	<b>61</b>
<b>4.1.</b>	<b>El procés de la identificació experimental de sistemes.....</b>	<b>61</b>
<b>4.2.</b>	<b>Eleccions comunes a tots els experiments.....</b>	<b>62</b>
4.2.1.	Estructura del model .....	62

4.2.2.	Disseny dels senyals d'entrada.....	63
4.2.3.	Mètode i criteri d'optimització.....	64
4.2.4.	Eines de programari per a l'optimització. Mètodes numèrics .....	65
4.2.5.	Criteris de validació .....	72
<b>4.3.</b>	<b>Disseny dels experiments: full de ruta.....</b>	<b>76</b>
<b>4.4.</b>	<b>Identificació del motor CC de cua .....</b>	<b>78</b>
4.4.1.	Equacions, diagrama de blocs i paràmetres a identificar.....	78
4.4.2.	Temps de mostreig i senyals d'entrada .....	79
4.4.3.	Captura de dades .....	79
4.4.4.	Experiments i resultats .....	80
4.4.5.	Validació .....	84
<b>4.5.</b>	<b>Identificació del motor CC principal.....</b>	<b>85</b>
4.5.1.	Equacions, diagrama de blocs i paràmetres a identificar.....	86
4.5.2.	Temps de mostreig i senyals d'entrada .....	87
4.5.3.	Captura de dades .....	87
4.5.4.	Experiments i resultats .....	88
4.5.5.	Validació .....	93
<b>4.6.</b>	<b>Conclusions sobre els models dels motors .....</b>	<b>94</b>
<b>4.7.</b>	<b>Identificació estàtica en el pla vertical .....</b>	<b>95</b>
4.7.1.	Equacions, diagrama de blocs i paràmetres a identificar.....	95
4.7.2.	Temps de mostreig i senyals d'entrada .....	96
4.7.3.	Captura de dades .....	96
4.7.4.	Experiments i resultats .....	97
<b>4.8.</b>	<b>Identificació dinàmica directa en el pla vertical .....</b>	<b>99</b>
4.8.1.	Equacions, diagrama de blocs i paràmetres a identificar.....	99
4.8.2.	Temps de mostreig i senyals d'entrada .....	100
4.8.3.	Captura de dades .....	100
4.8.4.	Experiments i resultats .....	101
4.8.5.	Validació .....	103
<b>4.9.</b>	<b>Identificació dinàmica creuada en el pla vertical.....</b>	<b>105</b>
4.9.1.	Equacions, diagrama de blocs i paràmetres a identificar.....	106
4.9.2.	Temps de mostreig i senyals d'entrada .....	106
4.9.3.	Captura de dades .....	107
4.9.4.	Experiments i resultats .....	107
<b>4.10.</b>	<b>Conclusions sobre la identificació en el pla vertical.....</b>	<b>109</b>

<b>4.11. Identificació estàtica en el pla horitzontal .....</b>	<b>110</b>
4.11.1. Equacions, diagrama de blocs i paràmetres a identificar .....	110
4.11.2. Temps de mostreig i senyals d'entrada .....	111
4.11.3. Captura de dades.....	111
4.11.4. Experiments i resultats.....	113
<b>4.12. Identificació dinàmica directa en el pla horitzontal .....</b>	<b>114</b>
4.12.1. Equacions, diagrama de blocs i paràmetres a identificar .....	114
4.12.2. Temps de mostreig i senyals d'entrada .....	115
4.12.3. Captura de dades.....	116
4.12.4. Experiments i resultats.....	117
4.12.5. Validació.....	118
<b>4.13. Identificació dinàmica creuada en el pla horitzontal .....</b>	<b>120</b>
4.13.1. Equacions, diagrama de blocs i paràmetres a identificar .....	120
4.13.2. Temps de mostreig i senyals d'entrada .....	121
4.13.3. Captura de dades.....	121
4.13.4. Experiments i resultats.....	123
<b>4.14. Conclusions sobre la identificació en el pla horitzontal.....</b>	<b>125</b>
<b>4.15. Identificació del sistema global.....</b>	<b>126</b>
4.15.1. Equacions, diagrama de blocs i paràmetres a identificar .....	126
4.15.2. Temps de mostreig i senyals d'entrada .....	126
4.15.3. Captura de dades.....	126
4.15.4. Experiments i resultats.....	127
4.15.5. Validació.....	128
 <b>Capítol 5. Conclusions .....</b>	 <b>131</b>
 <b>Bibliografia i referències.....</b>	 <b>135</b>
<b>Bibliografia.....</b>	<b>135</b>
<b>Altres referències bibliogràfiques .....</b>	<b>143</b>
 <b>Llistat de figures .....</b>	 <b>145</b>
 <b>Llistat de taules .....</b>	 <b>149</b>

<b>Llistat de símbols .....</b>	<b>151</b>
 <b>Annex A. Característiques tècniques .....</b>	 <b>153</b>
<b>A.1. Tacòmetre òptic .....</b>	<b>153</b>
A.1.1. Característiques .....	153
A.1.2. Especificacions tècniques.....	153
 <b>A.2. Hèlices Graupner .....</b>	 <b>154</b>
<b>A.3. Motors A-max i tacòmetre DCT-22.....</b>	<b>154</b>





## Prefaci

L'èxit en la modelització de qualsevol sistema rau en les habilitats i coneixements dels especialistes en aquell camp d'estudi, els quals suggereixen com manipular el sistema, revelen els seus aspectes més importants, realitzen les aproximacions adients, etc. Tanmateix, molt sovint aquests experts no estan familiaritzats amb la teoria de la identificació de sistemes i, per tant, en cada nova situació, s'enfronten a problemes que ja han estat resolts en la literatura de la identificació.

En el camp de la ciència i l'enginyeria, moltes disciplines tenen un rerefons en comú i comparteixen les mateixes tècniques per a la resolució de problemes. En el present treball, el pretext d'un prototip d'helicòpter ha fet endinsar-nos en el món de l'aeronàutica, però podria haver estat qualsevol altre sistema més relacionat amb el món de les telecomunicacions, com ara una agrupació d'antenes amb entrades i sortides acoblades. Un bon exemple d'aquest enfoc sistèmic el trobem en l'àmbit de la teoria de control: un cop construït el model, és a dir, un cop caracteritzades matemàticament les seves propietats, el tractament dins d'aquest camp és exactament el mateix independentment de l'origen físic del sistema. Precisament, aquesta és una de les característiques més importants de la teoria de control, la seva interdisciplinarietat.

Com és sabut, la modelització i la identificació de sistemes, que tenen com a objectiu la construcció d'un model adequat per a una determinada finalitat, no és una ciència exacta ni disposa d'una metodologia clara i concreta. Per obtenir bons resultats, allò imprescindible és posseir, òbviament, una sòlida base teòrica, així com els màxims coneixements possibles tant de l'ampli ventall de mètodes i enfocaments com de l'àrea de la ciència a la qual pertany el sistema a modelitzar. Tanmateix, en tot aquest procés intervenen també altres factors que fan de la modelització i la identificació unes disciplines obertes i variades. Així doncs, l'experiència en el terreny de la construcció de models és una destresa fonamental i, juntament amb la intuïció i el bon olfacte, permet a l'enginyer superar els difícils però no infranquejables esculls amb els quals pot ensopegar. A més a més, també cal tenir presents la bona sort, l'atzar i els fruits de súpliques i pregàries, components impredecibles però que juguen un paper important. La construcció de models acurats i fidels no és un camí planer sinó ple de dificultats i d'incògnites. Per això, vull fer-me ressò de les paraules de l'enginyer i inventor del marcapassos Wilson Greatbatch (1919–2011) que recullen Bell, Dooling i Fouke (2000) i que he tingut sempre presents durant la realització d'aquest projecte: «Don't fear failure and don't crave success.»

Realitzar aquest projecte m'ha permès d'aprofundir en conceptes vists durant la carrera i treballar —finalment!— en una aplicació pràctica mitjançant la metodologia científica per resoldre problemes. Tanmateix, m'agradaria ressaltar que he posat en pràctica tan bé com he pogut la manera de treballar del

professor Jaume Herranz, a qui considero un dels meus grans referents. Després d'innumerables hores de classes magistrals i d'haver treballat amb ell durant més de tres anys, aquest projecte pretén ser un exemple de la seva metodologia. Sens dubte, poder aplicar tots els coneixements adquirits al llarg d'aquests anys i endinsar-me en l'àmbit de la teoria de control a la qual el professor Herranz havia dedicat gran part de la seva vida —i de la qual n'era un exponent dins de la docència en el nostre país— ha estat una gran motivació per a mi.

El professor Herranz, amant empedreït dels llibres, sempre insistia en la necessitat de «beure l'aigua de les millors fonts». Seguint aquesta màxima, s'ha realitzat una exhaustiva cerca bibliogràfica per tal de disposar dels treballs i obres més significatius en cadascun dels àmbits que aquí ens ocupen. Per aquest fi, s'han emprat des de cercadors generals a motors de cerca especialitzats, passant per la clàssica recerca en biblioteques i la utilització dels catàlegs en línia que ofereixen les revistes científiques. No obstant això, val a dir que tant o més important que la pròpia cerca ha estat la seva acurada selecció, sobretot atès que, avui en dia, els grans motors de cerca d'Internet permeten accedir a quantitats ingents d'informació. Certament, tot aquest llistat bibliogràfic pretén ser una eina de referència per a futurs investigadors que s'enfrontin als mateixos problemes.

En darrer lloc, val la pena esmentar la tasca laboriosa que ha suposat l'aspecte comunicatiu d'aquest projecte per fer arribar al lector els resultats i els conceptes de forma clara. S'ha posat especial atenció en tots els aspectes de la llengua: d'una banda, s'ha intentat articular el treball amb la coherència i cohesió discursives del raonament científic; d'altra banda, s'han tingut en compte les normes relatives a l'ortotipografia específica catalana, el llibre d'estil de la UPC, les guies lingüístiques del Servei de Llengües i Terminologia de la UPC i l'ús del sistema Harvard (autor-data) de citació bibliogràfica. Per últim, atesa la predominança de l'anglès com a llengua vehicular en la literatura de caire científic i tècnic, s'han buscat solucions adients als problemes lèxics trobats. Per exemple, la terminologia emprada al llarg d'aquest treball pertany principalment als àmbits de la física, de l'aeronàutica i de la identificació de sistemes, i que el diccionari terminològic disponible en català encara no abracin tots els termes existents en anglès o castellà ha estat una dificultat afegida. Com a conseqüència, en alguns casos s'ha hagut de recórrer a la pròpia creació de neologismes (i.e. *ajust* pel terme *best fit*), a l'ús de calcs (i.e. *arrossegament*, traducció literal d'*arrastre*) o, fins i tot, d'estrangerismes (i.e. algorismes *line search* o *trust region*), que és precisament allò que es volia evitar. Amb tot, s'ha volgut fer palès que també el català és una llengua moderna, rica, de cultura, clara i lògica en la qual es pot fer ciència.

Antoni Hernández Bonet

<antoni.hb81@gmail.com>

Cornudella de Montsant (Priorat), 8 de gener de 2012

## Agraïments

Vagi el meu primer agraïment al professor Eliezer Toribio del Departament de Física Aplicada (FA) de la UPC pel seu interès mostrat en aclarir els conceptes de física.

Al professor Jose Eduardo García del FA de la UPC, per la seva amable accessibilitat i interès mostrat en solucionar els nous reptes.

Al Damiano Rotondo, al professor Vicenç Puig i a la professora Fatiha Nejari, del grup SAC de la UPC, per la seva cordialitat, per aconsellar-me i il·luminar-me quan més fosca era l'habitació del TRMS.

També vull agrair la sempre bona predisposició a col·laborar i a solucionar problemes de forma efectiva del Sergio Zarza del TSC.

Tot aquest projecte no hauria estat possible sense l'excel·lent Servei de Biblioteques i Documentació de la UPC, ni l'ajuda del Servei de Llengües i Terminologia, en especial del Jordi Giner de la Unitat d'Assessorament Lingüístic, que no sap qui sóc, però s'ha vist asservit amb els meus dubtes.

A l'Edurne Castro pel seu bon gust, destresa, habilitat, minuciositat, perfeccionisme i detallisme en l'elaboració de les magnífiques figures dels Capítols 2 i 3.

A la Laia Guinovart, per les improvisades classes magistrals de llengua, per ensenyar-me a tractar els textos d'igual forma que als números, per obrir-me la caixa d'eines dels lingüistes i per ajudar-me a trobar la paraula justa en la frase concreta.

També a la Carolyn Law, que vessa detallisme i rigor pels quatre cantons, i perquè treballar amb ella els textos en anglès sempre és gratificant i enriquidor en tots els aspectes.

A l'historiador Francesc Fortuño, per haver-me obert les portes de la biblioteca de la Universitat Rovira i Virgili, i al Ramon Cubells que amablement ha fet de taxista tot i ser un reconegut enginyer de camins.

Al meu pare Antonio, per mostrar-me com treballa una persona amb enginy —és a dir, un enginyer—, i a la meva mare Cati, per haver desplegat tota la infraestructura necessària com només ella sap fer.

*And last but not least* a la meva tutora, Rosa Maria Fernández, per haver-me fet descobrir el món de la identificació de sistemes e introduir-me en el món del control, per tots els consells que m'ha donat i, per descomptat, pels futurs treballs conjunts.



## Capítol 1. Introducció

### 1.1. Motivació

L'any 2009 el grup de Sistemes Electrònics de Control (SEC) del Departament de Teoria del Senyal i Comunicacions (TSC) de la Universitat Politècnica de Catalunya (UPC) va rebre un finançament per part del Departament per muntar un laboratori de control avançat. Es va optar per la compra de dos prototips per a experiments de control a l'empresa Feedback Instruments Ltd.: un levitador magnètic i un prototip d'helicòpter. Ambdós aparells permeten treballar en les dues línies acadèmiques per excel·lència. Per una banda, la docència, fent demostracions amb el levitador en l'assignatura de Sistemes Electrònics de Control (SEC) de l'encara vigent Pla 92 d'Enginyeria en Electrònica; i per l'altra, la recerca, mitjançant l'helicòpter de laboratori, essent aquest projecte el primer en aplicar-hi tècniques avançades d'identificació.

En efecte, la motivació principal d'aquest projecte ha estat la d'obrir, juntament amb el treball de Milena (2010), noves línies de recerca en l'àmbit del control avançat en el laboratori del grup. Actualment, gràcies al gran potencial dels ordinadors i de les eines per al càlcul, el tradicional enfocament dels sistemes lineals invariants en el temps (LTI, en anglès *Linear Time Invariant*) amb una entrada i una sortida (SISO, *Single-Input Single-Output*) està quedant relegat als llibres de teoria per donar pas a models de sistemes més complexos, com ara els MIMO (*Multiple-Input, Multiple-Output*) i els no lineals i variants en el temps (NLTV, *Non-Linear Time Varying*). En aquest entorn, el prototip d'helicòpter adquirit pel grup SEC és un sistema idoni per a realitzar en el laboratori exercicis i experiments d'identificació no lineal i de control multivariable.

La problemàtica que presenta aquest aparell, en tant que sistema no lineal d'entrades i sortides múltiples, queda fora dels estudis de segon ordre de grau d'aquesta Escola. En concret, aquest prototip representa un complex sistema de dues entrades i dues sortides fortament acoblades entre sí, amb un comportament no lineal i totalment depenent de les condicions inicials, que el fan desestabilitzar fàcilment i converteixen el disseny de controladors en tot un repte. Efectivament, aquesta complexitat implica que sigui totalment imprescindible comptar amb un bon model del sistema per tal de poder dissenyar aquests controladors. L'experiència assenyala que els controladors d'altres prestacions (*high performance controllers*) dissenyats en base a models no són capaços d'oferir bons resultats si no han estat construïts a partir d'un model suficientment acurat. Un bon exemple d'això és l'aparició en els darrers temps de nombrosos treballs proposant diferents models per a aquest prototip d'helicòpter, que denota l'absoluta

no-trivialitat d'aquesta tasca. En cadascun d'aquests treballs es pot observar la importància cabdal que el procés de modelització i identificació experimental tenen en l'aplicació de la teoria de control (vegeu l'apartat 1.4).

## 1.2. Objectius

L'objectiu principal d'aquest projecte és la **construcció d'un model no lineal** de l'helicòpter de laboratori *Twin Rotor MIMO System* (TRMS) de la casa Feedback Instruments Ltd. El model ha de ser capaç de descriure'n la dinàmica en un ampli marge de treball i permetre'n el disseny de controladors. La construcció d'aquest model engloba tant un procés de modelització teòrica, basat en el coneixement *a priori* del sistema i en l'aplicació dels principis bàsics de la física, com un procés d'identificació experimental *a posteriori*, basat en mesures sobre l'equip.

Com en qualsevol procés científic, el primer pas és conèixer quin és l'estat de l'art. És primordial saber de primera mà què es coneix i què s'ha escrit sobre el fenomen a tractar. Per tant, un altre dels objectius del present PFC és realitzar una **recerca bibliogràfica** a diferents nivells. Per una banda, sobre aspectes més divulgatius del funcionament d'un helicòpter, i per l'altra, sobre vessants més tècniques, com ara la modelització o les diferents aplicacions del prototip que, encara que quedin fora de l'abast d'aquest projecte, seran útils en futurs estudis que estiguin més orientats al disseny de controladors.

Per acomplir l'objectiu principal d'obtenir el model, s'han definit un seguit d'objectius parcials, entre els quals destaquen el **muntatge** i la **posada en funcionament de l'equip** (amb la modificació del programari per poder realitzar experiments més acurats i la introducció d'altres aparells de mesura com un tacòmetre òptic), l'**obtenció d'un model analític complet** a partir de les lleis de la física, la **identificació experimental dels paràmetres** (valorant diferents mètodes, tècniques i eines de programari per a l'optimització no lineal, que no és en absolut l'habitual) i la **validació del model**.

## 1.3. Antecedents

El TRMS és una planta de referència en l'àmbit de l'enginyeria de control, és a dir, és reconeguda com a vàlida per a fer experiments d'identificació i disseny de controladors. Gairebé tots els grups de control en tenen una —sense anar més lluny, en la pròpia UPC, a banda del grup SEC, en disposen també l'Institut d'Organització i Control de Sistemes Industrials (IOC) i el grup de Sistemes Avançats de Control (SAC)—, fet pel qual existeixen una gran quantitat de treballs —articles, contribucions a congressos, projectes i tesis— dedicats a l'estudi d'aquesta planta.

La majoria de tots aquests treballs tenen principalment dues vessants: per una banda, la modelització del sistema; i per l'altra, el disseny de controladors. Centrant-nos només en la primera d'elles, les solucions al problema de construir un model precís són força heterogènies: des de models basats en els principis bàsics de la física a models experimentals de xarxes neuronals, passant pels populars models paramètrics. Com que el PFC que esteu llegint tracta el problema des d'un punt de vista newtonià —és a dir, a partir dels principis bàsics de la física—, a continuació es presenten els treballs que han recolzat la construcció d'un model no lineal seguint aquesta línia.

El manual antic de l'aparell (Feedback Instruments 1998b) proposa un model newtonià del TRMS molt senzill i excessivament rudimentari. Per contra, el treball de Christensen *et al.* (2006) és un estudi força exhaustiu del sistema i suposa una millora important respecte al manual original. Tanmateix, són Rahideh i Shaheed (2007, 2008a) els que milloren substancialment aquest model físic, ja que tenen en compte més forces que actuen en el prototip d'helicòpter. Per això, aquests dos articles són la font principal en la qual es basa aquest projecte i gràcies als quals es pretén trobar el millor model possible per al prototip del nostre laboratori. Des de la UPC, Nejari *et al.* (2011a, b) també proposen una millora al model de Rahideh i Shaheed (2007, 2008a) amb la consecució de resultats molt interessants. Finalment, els treballs de Gabriel (2008), de Balderud (2002) i d'Ahmed (2009) —aquests dos darrers en un prototip de diferent fabricant— aporten atractives solucions en aspectes concrets de la modelització. Ara bé, convé ressaltar que un dels propòsits d'aquest projecte també és el d'intentar explicar amb més detall alguns conceptes, com ara el moment de l'efecte giroscòpic o el de la força centrífuga, que s'han anat *heretant* d'un article a un altre sense estar suficientment justificats. Trobareu un llistat més complet i exhaustiu en el següent apartat.

#### 1.4. Estat de la qüestió

En aquest apartat es pretén fer un ampli llistat de tots els articles que tracten la problemàtica del TRMS en la vessant de la modelització. No té altre objectiu que el de donar als investigadors del TRMS unes primeres referències on començar a cercar segons sigui l'objectiu del seu treball.

Els articles que desenvolupen un model newtonià del TRMS, o bé que simplement es basen en ell són els següents: Feedback Instruments (1998b), Rahideh i Shaheed (2006, 2007, 2008a), Nejari *et al.* (2011a, b), Christensen *et al.* (2006), Gabriel (2008), Rahideh, Shaheed i Bajodah (2007), Rahideh, Shaheed i Huijberts (2008), Juang, Liu i Tsai (2005), Liu i Juang (2009) i Espuga (2011). Entre els treballs que modelen un prototipus d'helicòpter de diferent fabricant trobem Balderud (2002), Ahmed (2009), Bhatti i Iqbal (2009a, b) i Ahmed *et al.* (2010).

Rahideh i Shaheed (2007) i Rahideh, Shaheed i Huijberts (2008) basen els seus models en les equacions lagrangianes. En canvi, Nejari *et al.* (2011a, b) i Espuga (2011) també desenvolupen models LPV. Els models paramètrics i black-box es poden trobar en Feedback Instruments (2006a), Ahmad, Chipperfield i Tokhi (2000a, 2000b, 2000c, 2001, 2002, 2003, 2004), Darus, Aldebrez i Tokhi (2004), Toha i Tokhi (2010) i Alam i Tokhi (2007). Triantafyllopoulos *et al.* (2009) presenta un model bayesià.

Dins dels models basats en xarxes neuronals, en qualsevol de les seves vessants, hi ha Rahideh, Shaheed i Huijberts (2008), Ahmad *et al.* (2000), Rahideh i Shaheed (2008b), Ahmad *et al.* (2002), Aldebrez, Darus i Tokhi (2004), Afruz i Alam (2010) i Subudhi (2009).

Finalment, són molt interessants —sobretot per l'efecte giroscòpic— els articles que tracten diferents models de prototips de quatre rotors que s'enlairen: McKerrow (2004), Guenard, Hamel i Moreau (2005), Derafa, Madani i Benallegue (2006), Derafa *et al.* (2010), Erginer i Altug (2007) i Amir i Abbass (2008).

## 1.5. Organització de la memòria

En el Capítol 2, amb la finalitat d'emmarcar aquest treball en l'àrea de l'aeronàutica dedicada als helicòpters, es presenten conceptes emprats en la literatura tècnica que són molt útils per a poder entendre la teoria en què es basa el comportament dinàmic d'un helicòpter.

En el Capítol 3, en primer lloc es descriu el TRMS i les seves característiques principals. En segon lloc, es detalla el model analític que pretén descriure el seu comportament dinàmic a partir de les equacions físiques del moviment.; i finalment, es construeix un model no lineal de blocs SIMULINK basat en les anteriors equacions.

En el Capítol 4, s'especifiquen els diferents passos seguits en la identificació experimental del model i en l'ajust de paràmetres no mesurables en el sistema real. Es descriu el disseny dels diversos experiments realitzats en el TRMS, així com la verificació experimental del model global obtingut i els resultats experimentals mitjançant l'ús de gràfiques i taules.

En el Capítol 5 s'extreuen les conclusions del projecte i s'apunten diferents línies de treball futures. A continuació hi ha la bibliografia, els llistats de figures, de taules i de símbols. Finalment, en l'annex s'hi troben les característiques tècniques de l'instrumental utilitzat.



## Capítol 2. Dinàmica dels helicòpters

El present capítol té un caràcter purament divulgatiu a fi de poder comprendre la dinàmica d'un helicòpter. Ara bé, no pretén ser un estudi aerodinàmic exhaustiu del comportament de l'aeronau en qualsevol situació, sinó que té la voluntat d'oferir al lector unes pinzellades bàsiques sobre les característiques més importants del vol d'un helicòpter, especialment en situacions molt concretes, com el vol en estacionari. Pels lectors que vulguin aprofundir més en el tema, es recomanen les lectures divulgatives de Roed (1995) i U.S. Department of Transportation (2006) i la visualització dels vídeos de Brain (2000). Per als lectors més avançats tècnicament, consulteu Cuerva (2009) i Bramwell, Done i Balmford (2001).

### 2.1. Introducció

La paraula *helicòpter* deriva del terme francès *hélicoptère*, encunyat pel pioner de l'aviació Gustave Ponton d'Amécourt\* el 1861 a partir de les paraules gregues *helix/helik* (hèlix) i *pteron* (ala). Les singulars capacitats d'un helicòpter el fan molt útil per a una àmplia varietat de propòsits: pot enlairar-se des de petites plataformes, volar a grans velocitats sobre l'aigua i terrenys accidentats, estacionar-se i aterrar per deixar o recollir càrregues en llocs inaccessibles per a d'altres vehicles i, fins i tot, operar en condicions atmosfèriques adverses. El seu rotor principal és qui li proporciona el principal avantatge, sustentat-se en l'aire sense la necessitat de desplaçar-se cap endavant, podent així enlairar-se i aterrar sense la necessitat de cap pista.

Les diferents aeronaus d'ales giratòries difereixen entre elles per les variacions en el sistema de sustentació i en el de propulsió-tracció. És responsabilitat del primer sistema, el de sustentació, equilibrar el pes de l'aeronau, mentre que el segon permet que el vehicle avanci vençant la resistència aerodinàmica que apareix en l'aeronau a causa del seu vol. En ambdós sistemes (sustentació i propulsió) és possible trobar-hi una gran varietat de dissenys, la qual cosa comporta l'existència d'un gran nombre de diferents aeronaus d'ales giratòries, com les mostrades en la Figura 2.1.

---

\* Aquest mot aparegué oficialment en el certificat d'adició de la patent núm. 49.077 d'un petit prototip d'helicòpter que data del 16 de juliol de 1862 a França. Tanmateix, el 3 d'agost de 1861, Ponton d'Amécourt ja havia presentat una sol·licitud de patent a Anglaterra que contenia les següents paraules: *My aerostatical apparatus which I intend denominating aeronef or helicoptere* (Centre Nationale de Ressources Textuelles et Lexicales 2009)

---



**Figura 2.1** Diferents tipus d'aeronaus d'ales giratòries

- a) Helicòpter amb rotor de cua (Field 2006); b) Helicòpter amb doble rotor principal (Lanza 2009);  
c) Autogir (Paumier 2007); d) Girodina (Jonwithnoh 2007)

En l'helicòpter, a diferència de la resta d'aeronaus d'ales giratòries com la girodina o l'autogir, els rotors horitzontals, formats cadascun per dos o més pales, actuen a la vegada com a elements sustentadors i propulsors. Per aconseguir aquest doble propòsit, s'inclina el pla del rotor, generant així una força amb una component de tracció en el sentit d'avançament que contraresta la resistència aerodinàmica de l'helicòpter, i amb una component vertical que equilibra el pes de l'aparell. El gir del rotor és, en la immensa majoria dels casos, a velocitat constant. Els helicòpters més estesos són els que tenen un sol rotor principal amb compensació de parell mitjançant un rotor antiparell a la cua.

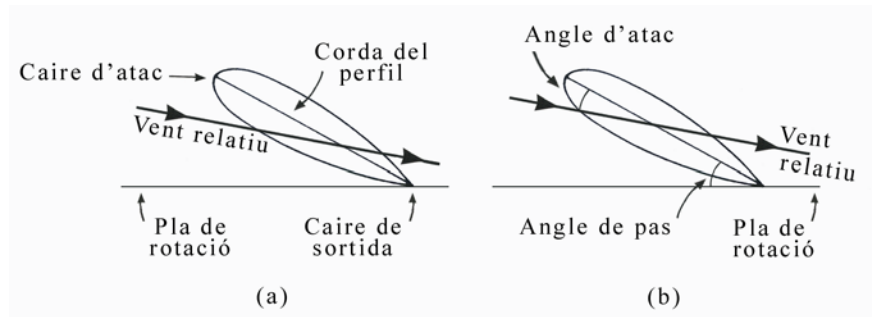
## 2.2. Conceptes bàsics

### 2.2.1. Aerodinàmica

A continuació es presenten alguns conceptes molt utilitzats en la literatura aerodinàmica i que són molt útils per poder entendre la teoria que es desenvolupa més endavant. Aquests termes són: *perfil d'ala*, *corda del perfil*, *vent relatiu*, *angle de pas* i *angle d'atac*.

Un **perfil** és qualsevol superfície dissenyada per a produir sustentació o tracció quan l'aire passa al voltant de la mateixa. Exemples de perfil són les ales, les hèlices dels avions i les pales dels rotors dels helicòpters. Les pales del rotor principal de la majoria d'helicòpters són perfils simètrics, és a dir, tenen la mateixa curvatura sobre ambdues superfícies superior i inferior. Mentre que en un perfil asimètric el

centre de pressions és variable, el moviment d'aquest en un perfil simètric està molt limitat, la qual cosa és preferible per a les pales del rotor d'un helicòpter. La **corda del perfil** és la línia recta imaginària que uneix el caire d'atac amb el caire de sortida, i s'anomena **vent relatiu** a la direcció del flux d'aire respecte a la corda del perfil (vegeu la Figura 2.2a).



**Figura 2.2** Perfils d'ala: a) caires, corda i vent relatiu; b) angle de pas i angle d'atac

En el món de l'aerodinàmica, existeixen dos angles molt importants: l'angle de pas i l'angle d'atac. Ambdós angles són il·lustrats en la Figura 2.2b. Per un costat, l'**angle de pas** de les pales del rotor és l'angle agut que formen la corda de perfil d'ala i un pla de referència determinat pel coixinet del rotor principal —pla de rotació del rotor. Per l'altre, l'**angle d'atac** el formen la corda del perfil i la direcció del vent relatiu. No s'han de confondre ambdós angles: mentre que el de pas ve determinat pels comandaments de la cabina —principalment pel control de pas col·lectiu, però també pel control cíclic (vegeu l'apartat 2.5)—, el d'atac ve determinat per la direcció del vent relatiu, totalment aliè al pilot. Tot i així, el pilot pot augmentar o disminuir l'angle d'atac canviant l'angle de pas de les pales del rotor: si s'augmenta l'angle de pas, augmenta el d'atac; si es disminueix l'angle de pas, disminueix el d'atac.

### 2.2.2. Forces que intervenen en el vol

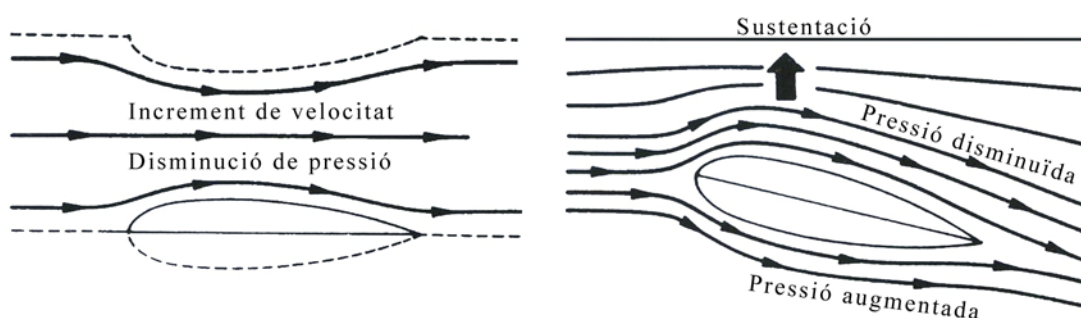
Durant qualsevol classe de vol horitzontal o vertical, hi ha quatre forces que actuen sobre l'helicòpter: la *sustentació*, la *tracció*, el *pes* i la *resistència*. La sustentació total és la força necessària per a suportar el pes de l'helicòpter, mentre que la tracció és la força que es requereix per a vèncer la resistència del fuselatge i demés components de l'helicòpter.

La força de **sustentació**<sup>\*</sup> que es produeix en un perfil d'ala ve descrita pel principi de Bernoulli<sup>†</sup> i per l'efecte Venturi. En un tub de Venturi<sup>\*</sup>, a mesura que la velocitat de l'aire augmenta a través de

<sup>\*</sup> Aquí s'entén la força de sustentació de l'ala, no la global de l'helicòpter, que és la contribució de les forces de sustentació de cada ala.

<sup>†</sup> L'equació de Bernoulli per al flux constant i no viscos d'un fluid incompressible relaciona la pressió, l'altura i la velocitat d'aquest fluid i ve descrita per la següent igualtat:  $P + \rho gy + \rho v^2 / 2 = \text{constant}$ , on  $P$  és la pressió del fluid al llarg de la línia de corrent,  $\rho$  és la densitat del fluid,  $g$  és l'acceleració gravitatòria,  $y$  és l'altura del fluid respecte a una cota de referència i  $v$  és la velocitat del fluid en la secció considerada. (Tipler i Mosca 2005a). Aquesta combinació de magnituds calculada en un punt determinat del tub es conserva i té el mateix valor en qualsevol altre punt.

l'estrenyiment del tub, la pressió disminueix. Tal com s'observa en la Figura 2.3, la superfície superior d'un perfil és molt similar a l'estrenyiment d'aquest tub gràcies a les capes d'aire no pertorbat que hi ha per sobre del perfil alar. Així, quan roten les pales i l'aire flueix per sobre de la superfície dels perfils, la curvatura d'aquests origina un augment de la velocitat del flux d'aire que, al seu torn, origina una disminució de la pressió sobre la superfície superior del perfil. Al mateix temps, el flux d'aire que topa amb la superfície inferior, inclinada amb un cert angle d'atac, augmenta la pressió. Globalment, la combinació de la disminució de la pressió sobre la superfície superior i l'augment de pressió sobre la superfície inferior dóna com a resultat la força de sustentació.



**Figura 2.3** (Esquerra) Principi de Bernoulli: l'augment de la velocitat produeix una disminució de la pressió en un estrenyiment de la canalització; (dreta) la sustentació d'un perfil es produeix per una disminució de la pressió en la part superior del perfil i un augment de la pressió en la part inferior (U.S. Department of Transportation 2006)

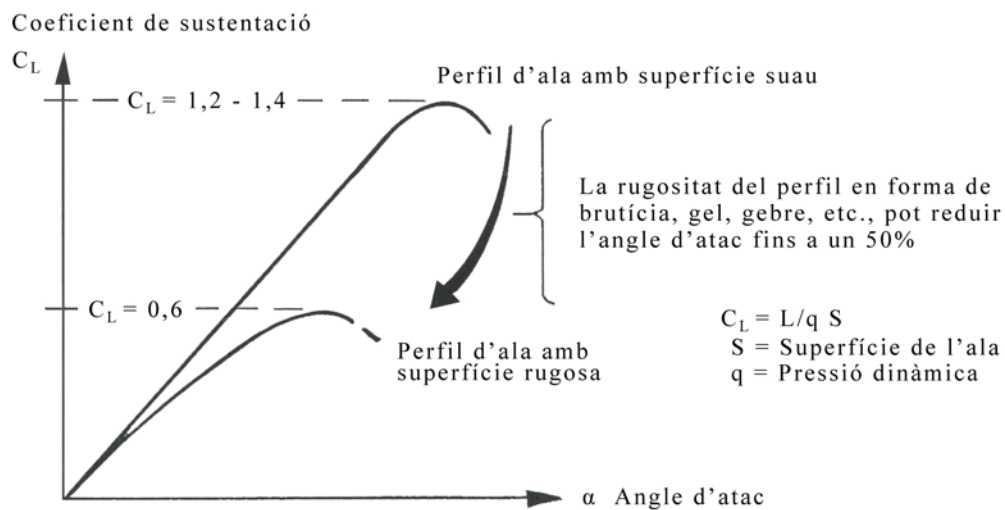
Al mateix temps que el perfil produeix sustentació també està sotmès a una força de **resistència** que tendeix a oposar-se al moviment del perfil a través de l'aire. Aquesta força actua paral·lelament i en sentit contrari al moviment del perfil, és a dir, en la mateixa direcció i sentit que el vent relatiu.

Un augment de l'angle d'atac —mitjançant la variació de l'angle de pas amb el comandament de pas col·lectiu— suposa un increment de la sustentació i de la resistència produïda a les pales del rotor, tendint així a disminuir la velocitat de rotació i necessitant una major potència per a contrarestar aquest efecte. Així mateix, donat un angle d'atac qualsevol, la sustentació augmenta si també augmenta la velocitat del flux d'aire incident. Per tant, el pilot també pot variar el valor de la sustentació amb la variació de les revolucions per minut (rpm) del rotor, ja que això suposa augmentar o disminuir la velocitat del vent relatiu. Tot i així, com a regla general, el pilot ha de procurar mantenir constants les rpm del rotor i variar la força de sustentació modificant l'angle de pas —i per tant, el d'atac— de les pales. A més, convé ressaltar que la sustentació també es veu directament influenciada per la densitat de l'aire. Si aquesta

\* El tub de Venturi és un dispositiu que permet mesurar el cabal d'un fluid que circula per l'interior d'una canonada. Consisteix en un estrenyiment intercalat en un conducte que crea una diferència de pressió entre la part ampla i l'estreta proporcional al quadrat del cabal que el travessa. Tot i ser inventat el 1797 per Giovanni Battista Venturi, no fou aplicat en el sector industrial fins gairebé un segle després (Enciclopèdia Catalana 2010).

darrera augmenta, la sustentació i la resistència augmenten; si disminueix, la sustentació i la resistència també es redueixen. Com a norma general, el pilot ha de prendre moltes precaucions en condicions d'elevada altitud, d'altres temperatures i d'alta humitat.

Per norma general, en augmentar l'angle d'atac augmenta la sustentació, però a partir d'un punt en concret, aquesta darrera disminueix i la resistència augmenta bruscament, fenomen que es coneix amb el nom d'*entrada en pèrdua*. La dependència de la sustentació amb l'angle d'atac es pot mesurar a través del *coeficient de sustentació*  $C_L$ , la variació del qual s'il·lustra en la Figura 2.4.



**Figura 2.4** Corba de sustentació d'un perfil d'ala en funció de l'angle d'atac.  
 Entrada en pèrdua i efecte de la rugositat del perfil (Roed 1995)

El **pes total** és la primera força que s'ha de vèncer per a que el vol sigui possible. La **tracció**, que mou l'helicòpter en la direcció desitjada, és la component de força que realitza el rotor principal en el sentit de l'avançament i que apareix gràcies a la inclinació del pla de rotor.

### 2.2.3. Moviments de les pales d'un helicòpter

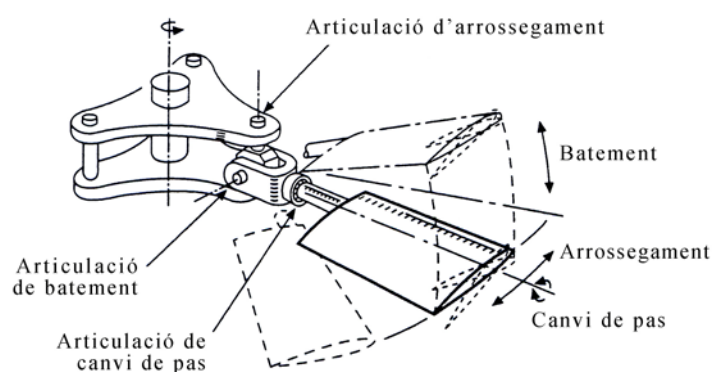
Sense cap mena de dubte, el rotor d'un helicòpter és el sistema mecànic més complex i sofisticat de tota l'aeronau. És allí on es generen les forces i els moments fonamentals que possibiliten el vol de l'aparell i, per això, és precís que incorpori un mecanisme responsable de transmetre el moviment de gir a les pales i de permetre-les-hi certs moviments que són necessaris per al correcte comportament aerodinàmic en qualsevol condició de vol. Segons es pot apreciar en la Figura 2.5, les pales poden realitzar bàsicament tres moviments.

En primer lloc, el moviment de *batement* (en anglès, *flapping*). Cada pala està unida al capçal del rotor per una articulació horitzontal anomenada *articulació de batement* o *de balancí* que permet moure (o

batre) cada pala cap amunt i cap avall independentment de la resta. Aquest moviment permet que les forces de sustentació de les pales s'equilibrin i es compensin així els diferents angles d'atac de les pales.

A més, cada pala també està unida al capçal del rotor per una articulació vertical, anomenada *d'arrossegament* o *de resistència*, que li permet moure's endavant o endarrere en el pla del rotor independentment de la resta. Aquest moviment s'anomena *d'arrossegament* (en anglès, *lagging*) i entre les seves finalitats hi ha la correcció de vibracions i l'absorció d'acceleracions i desacceleracions de les pales.

I finalment, el moviment de *canvi de pas* (en anglès, *feathering*), que permet canviar la seva col·locació respecte al pla de gir, variant així l'angle de pas. Aquest moviment es controla des del comandament col·lectiu i és el que permet pujar i baixar en vertical tot l'helicòpter, ja que fa variar la sustentació.



**Figura 2.5** Moviments de les pales d'un helicòpter  
(Bramwell, Done i Balmford 2001)

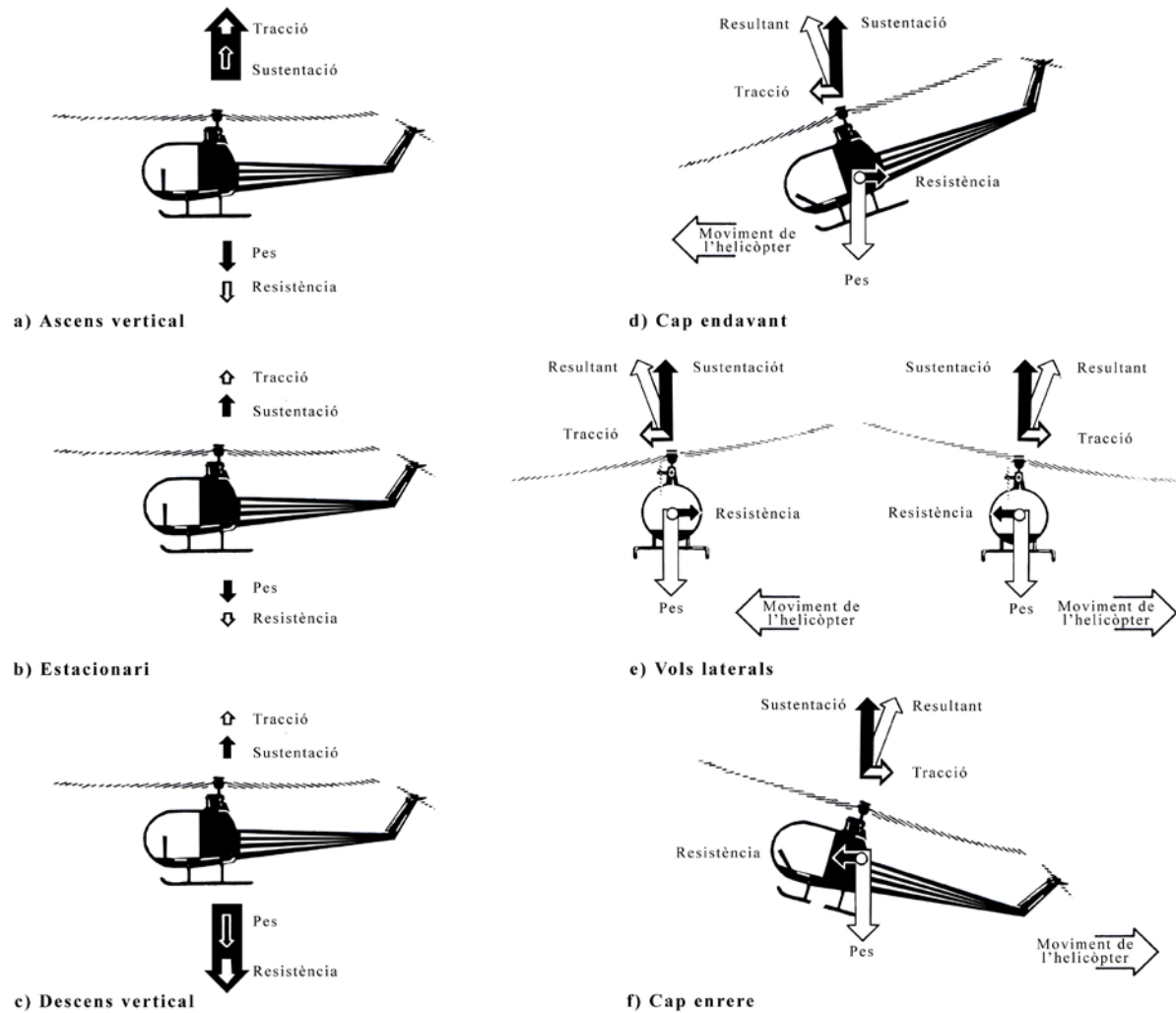
## 2.3. Aerodinàmica del vol

### 2.3.1. Rotor principal

En qualsevol classe de vol (estacionari, vertical, cap endavant, lateral o cap enrere), la resultant de les forces de sustentació i tracció del motor principal és perpendicular al pla descrit per la punta de les pales o pla de rotació del rotor. Això permet dirigir l'helicòpter en la direcció desitjada. En les situacions de vol estacionari, d'ascens i de descens verticals, el pla de rotació del rotor és totalment horitzontal, és a dir, és perpendicular a l'eix vertical de l'helicòpter (vegeu la Figura 2.6a, b i c). En aquests casos, les forces de tracció i sustentació actuen en el mateix sentit, mentre que el pes i la resistència ho fan en sentit contrari, la qual cosa permet els diferents moviments verticals.

Per a volar cap endavant, el pla de rotació s'inclina cap endavant, forçant així a la força resultant a inclinar-se respecte a la vertical (Figura 2.6d). Aquesta força pot descompondre's en dos components: la

part relativa a la sustentació, que actua verticalment cap amunt, i la relativa a la tracció, que ho fa horitzontalment en la direcció de vol. A més, també cal considerar el pes, que actua cap avall, i la resultant de les resistències, que actua en sentit contrari a la tracció. D'igual manera, per a desplaçar l'helicòpter en qualsevol altra direcció, només cal inclinar el pla del rotor cap allà on es desitgi, tal com s'observa en la Figura 2.6e i f.

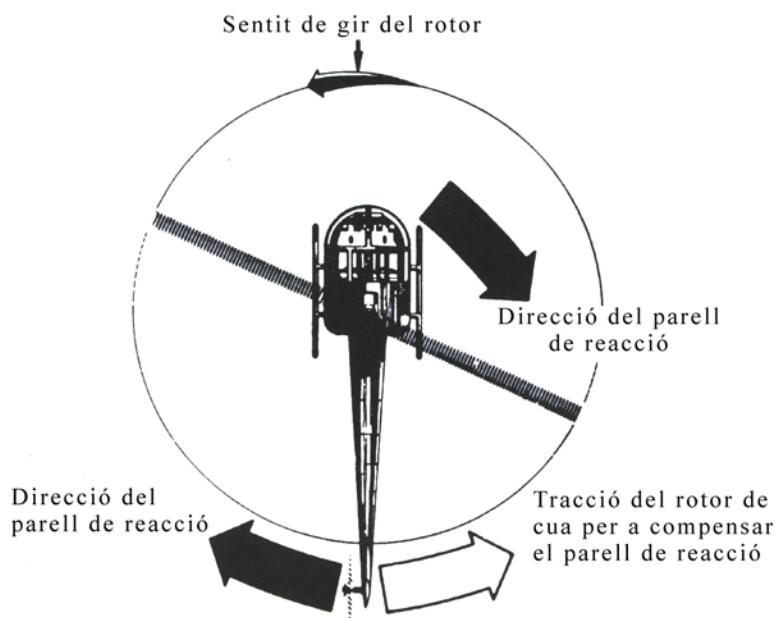


**Figura 2.6** Forces que actuen en l'helicòpter en diferents situacions de vol per l'acció del rotor principal  
(U.S. Department of Transportation 2006)

### 2.3.2. Rotor de cua

Segons la tercera llei de Newton, quan un cos exerceix una força sobre un altre, aquest segon n'exerceix una d'igual però de sentit contrari sobre el primer. Quan el rotor principal d'un helicòpter gira en un sentit, el fuselatge tendeix a girar en sentit contrari (Figura 2.7). Aquesta tendència del fuselatge, contrària a la del gir del rotor principal, es denomina *parell de reacció*.

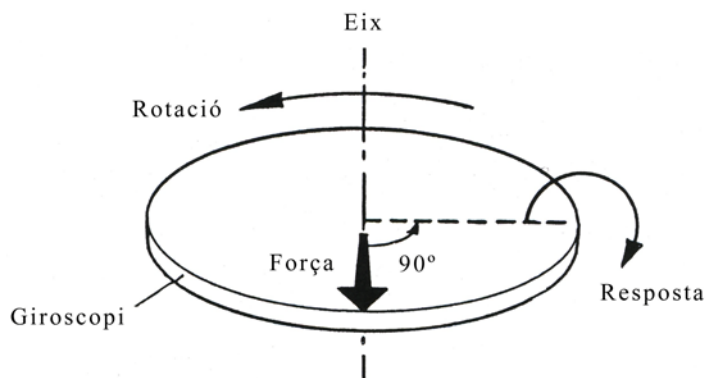
La força que compensa l'efecte del parell de reacció, impedit que el fuselatge giri en sentit contrari al del rotor principal, és produïda mitjançant el rotor auxiliar situat a la cua de l'helicòpter. Aquest rotor, conegut generalment com a *rotor de cua* o *rotor antiparell*, produeix una tracció de sentit contrari al del parell de reacció. En l'apartat 2.5.3 s'explica com els pedals de la cabina permeten augmentar o disminuir la tracció del rotor de cua per tal de neutralitzar aquest efecte.



**Figura 2.7** La tracció del rotor de cua compensa l'efecte del parell de reacció del rotor principal  
(U.S. Department of Transportation 2006)

### 2.3.3. Vol endavant

El gir del rotor principal d'un helicòpter actua com un giroscopi i, com a tal, té les seves propietats d'actuació, una de les quals és la *precessió*. La precessió giroscòpica és la desviació resultant que experimenta un objecte giratori quan se li aplica una força. Aquest efecte es produeix aproximadament uns 90° després, en el sentit de gir, del punt en què s'ha aplicat aquesta força (vegeu la Figura 2.8).

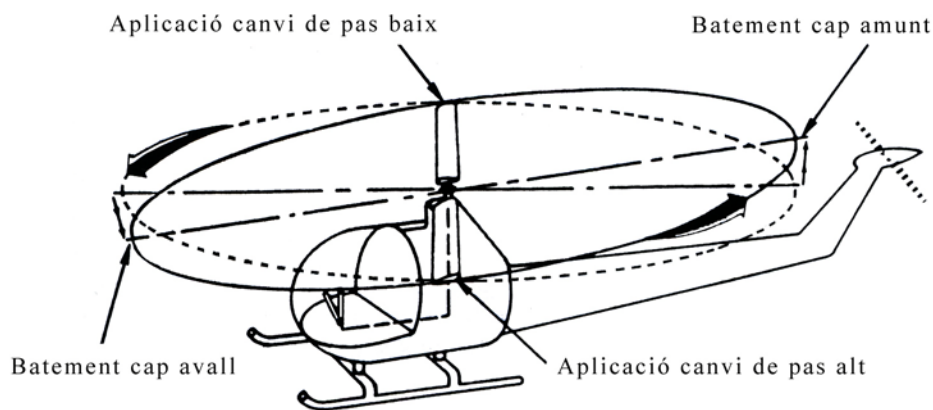


**Figura 2.8** Principi de precessió giroscòpica (Roed 1995)



Suposem ara un helicòpter amb un rotor principal de dues pales. En vol estacionari sense vent, la sustentació creada per les pales del rotor és la mateixa en totes les posicions que van escombrant al voltant del disc rotor. En canvi, en vol endavant o durant un vol estacionari amb vent, s'origina un efecte anomenat *dissimetria de sustentació*, que és la diferència de sustentació existent entre la pala que avança i la que retrocedeix. Observeu en la Figura 2.10 les diferents velocitats de les pales en ambdós casos.

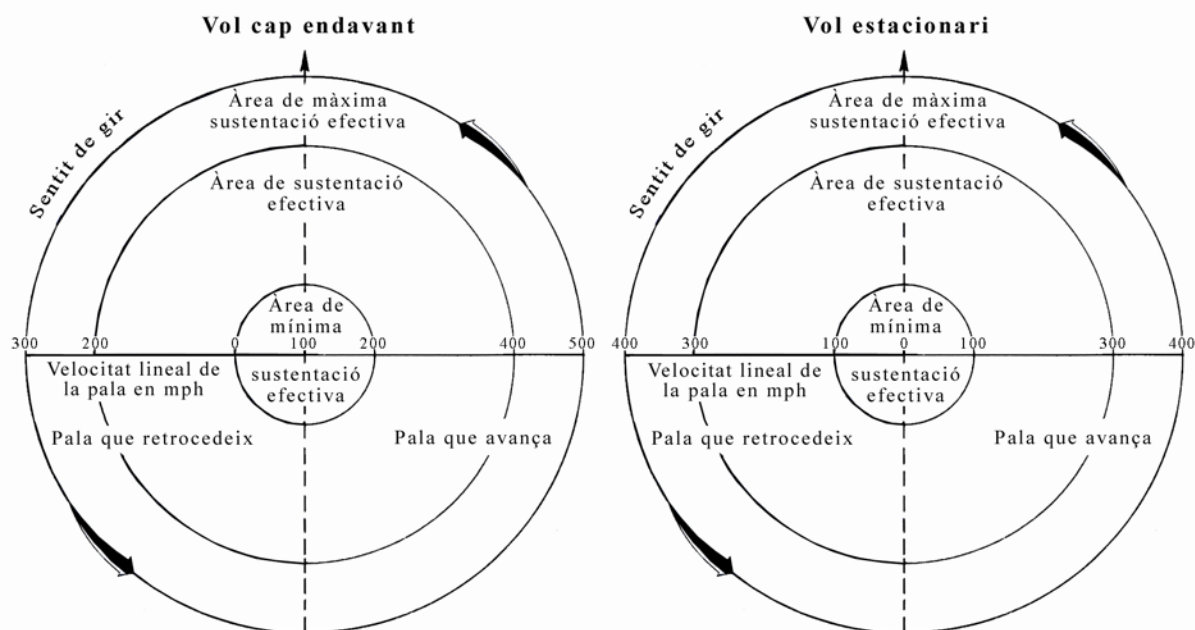
El moviment del comandament de pas cíclic provoca un augment de l'angle d'atac d'una de les dues pales, amb la qual cosa creix la força de sustentació en un punt del pla de rotació (vegeu-ho amb més detall en l'apartat 2.5.4). Simultàniament, el mateix control disminueix en proporció similar a l'angle d'atac de l'altra pala, decreixent així la força de sustentació en aquest punt del pla. La pala amb l'angle d'atac més gran tendeix a elevar-se, mentre que l'altra pala tendeix a abaixar-se. No obstant això, gràcies a la propietat de precessió giroscòpica, les pales no baten (amunt o avall) fins a un punt situat a uns  $90^\circ$  després de l'aplicació del canvi, tal com s'il·lustra en la Figura 2.9.



**Figura 2.9** El disc rotor actua com un giroscopi. Quan s'efectua un canvi de pas en una pala del rotor, la màxima reacció té lloc aproximadament  $90^\circ$  després en el sentit de gir.

(U.S. Department of Transportation 2006)

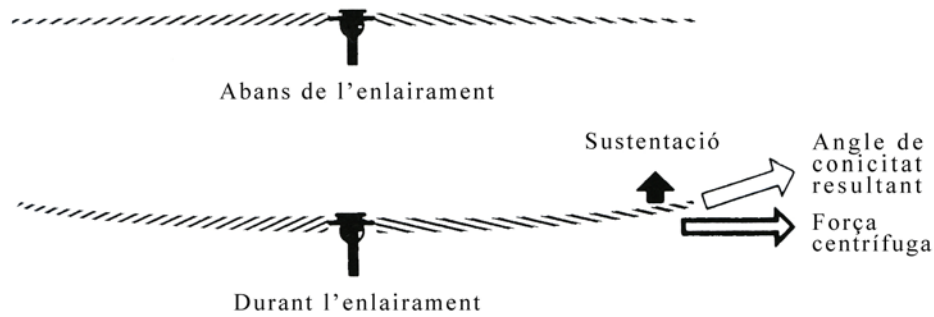
A més, les velocitats de les pales també són diferents. En la pala que avança, la velocitat respecte al vent relatiu és major perquè la velocitat de gir i la velocitat d'avanç en vol de l'helicòpter es sumen —en concret, la velocitat d'avanç fa augmentar la velocitat del vent relatiu. En canvi, en la pala que retrocedeix, la velocitat de rotació i la velocitat d'avanç en vol de l'aparell es contraresten (vegeu la Figura 2.10). D'aquesta manera, la pala que avança té més sustentació que la que retrocedeix. Aquesta diferència de sustentació entre les dues pales es compensa per mitja del batement i l'articulació de balanci, que permeten a la pala que avança elevar-se respecte el pla de gir i a la que retrocedeix abaixar-se, compensant així els angles d'atac relatius (disminueixen en la que avança i augmenten en la que retrocedeix).



**Figura 2.10** Comparativa entre les velocitats de la pala que avança i la que retrocedeix respecte al vent relatiu en vol estacionari i en vol cap endavant (U.S. Department of Transportation 2006)

Un altre efecte produït durant l'enlairament és la *conicitat*, que és la inclinació cap amunt de les puntes de les pales del rotor principal gràcies a l'acció combinada de la força de sustentació i la força centrífuga. Abans d'enlairar-se, les pales giren en un pla quasi perpendicular a l'arbre del rotor, ja que la força centrífuga és pràcticament l'única que actua sobre elles (vegeu la Figura 2.11). En canvi, durant l'enlairament vertical, dues forces actuen al mateix temps: la centrífuga, cap enfora perpendicularment a l'arbre del rotor, i la de sustentació, cap amunt paral·lelament a l'arbre. La resultant d'aquestes dues forces suposa que les pales es flexionin en lloc de mantenir-se en un pla perpendicular a l'arbre, principalment a les puntes de les pales, que és allà on la velocitat lineal i la sustentació són majors.

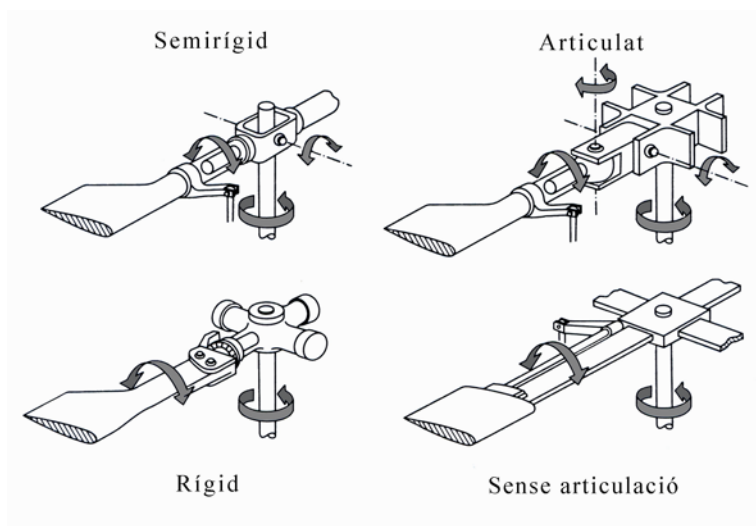
La magnitud de la sustentació és proporcional al quadrat de la velocitat de gir i, per tant, també proporcional al quadrat de les revolucions del rotor (U.S. Department of Transportation 2006). Aleshores, una pèrdua d'rpm en el rotor implica una ràpida disminució de la força centrífuga i de la sustentació en les pales, que pot mantenir-se augmentant l'angle de pas, per bé que també augmentaria l'angle de conicitat. Tanmateix, aquest efecte pot ser pal·liat i pràcticament eliminat gràcies a les articulacions de batament de les pales (en rotors bipala) o a les d'arrossegament (en rotors tripala).



**Figura 2.11** La conicitat és el resultat de les forces de sustentació i centrífuga  
(U.S. Department of Transportation 2006)

## 2.4. Tipus de rotors principals

Existeixen diferents tipus fonamentals de sistemes de rotor principal, com ara els rotors completament articulats, els rotors semirígid i els rotors rígids. En la Figura 2.12 es poden veure les diferències principals en els moviments de cadascun d'ells. En un sistema de rotor completament **articulat**, cada pala pot efectuar els tres moviments bàsics —batement, arrossegament i canvi de pas—, cada un independentment de la resta. Generalment aquest sistema consta de tres o més pales.



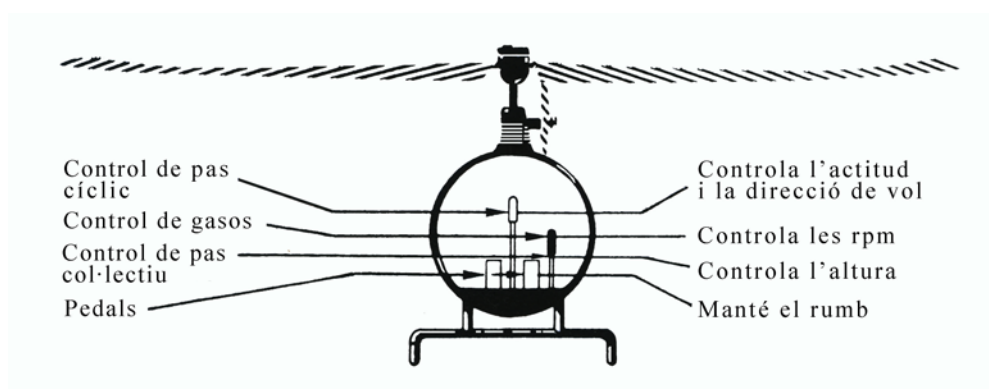
**Figura 2.12** Esquema dels diferents sistemes de rotor principal (Cuerva 2009)

Un sistema de rotor **semirígid** pot efectuar només dos moviments com una unitat: el de batement i el de canvi de pas. Aquest sistema és utilitzat normalment en rotors bipales. Les pales del rotor estan rígidament unides al rodet i aquest és lliure per inclinar-se i balancejar-se respecte l'eix del rotor. Cada pala no és independent de l'altra, i el rotor bat com una unitat, és a dir, quan una pala bat cap amunt,

l'altra ho fa cap avall en la mateixa mesura. Finalment, en els sistemes de rotor **rígid**, les pales, el rodet i l'arbre estan rígidament units entre sí. Aquest sistema no pot efectuar ni batement ni arrossegament, i únicament pot variar l'angle de pas de les pales.

## 2.5. Comandaments d'un helicòpter

Els quatre comandaments bàsics (Figura 2.13) que el pilot ha de saber utilitzar durant el vol de l'helicòpter són: 1) el comandament de pas col·lectiu (controla l'altura); 2) el comandament de gasos (controla les rpm); 3) els pedals antiparell o control del rotor de cua (mantenen el rumb); i 4) el comandament de pas cíclic (controla l'actitud\* i la direcció de vol).



**Figura 2.13** Comandaments de l'helicòpter i funció principal de cadascun d'ells  
(U.S. Department of Transportation 2006)

### 2.5.1. Control de pas col·lectiu

El control de pas col·lectiu és el principal comandament per a la variació de l'altitud. Aquesta palanca està situada al costat esquerre del seient del pilot i, movent-la cap amunt o cap avall, permet canviar l'angle de pas de les pales del rotor principal mitjançant una sèrie d'articulacions mecàniques. Quan la palanca puja, es produeix un augment simultani i d'igual magnitud de l'angle de pas de cadascuna de les pales; i quan baixa, una disminució simultània i d'igual magnitud. La longitud del recorregut de la palanca determina la magnitud de canvi de pas de les pales.

Com s'ha esmentat anteriorment, quan varia l'angle de pas de les pales del rotor també varia l'angle d'atac de cada pala. Si aquest darrer augmenta, la resistència també ho fa i les rpm tendeixen a disminuir; en canvi, si l'angle d'atac disminueix, la resistència també ho fa i les rpm tendeixen a augmentar. Com

---

\* L'actitud és la relació de l'eix longitudinal de l'helicòpter en respecte a l'horitzó natural, és a dir, si està girat o si està amb el morro aixecat o baixat. L'indicador d'actitud de l'aparell és de gran ajuda en condicions en què la visibilitat és poca o nul·la, podent saber així si l'helicòpter es troba recte i anivellat.

que és essencial que les rpm del rotor es mantinguin constants quan es varien els angles de pas, és necessari realitzar algun canvi proporcional de potència per tal de compensar el canvi de resistència. Aquesta coordinació es realitza a través d'una lleva d'unió de la palanca de pas col·lectiu-palanca de gasos, de forma que la potència augmenta automàticament quan es puja la palanca de col·lectiu i disminueix quan es baixa. Per tant, pujant el col·lectiu a part d'augmentar la sustentació del rotor, també ho fa la potència del motor (i viceversa).

### **2.5.2. Control de gasos**

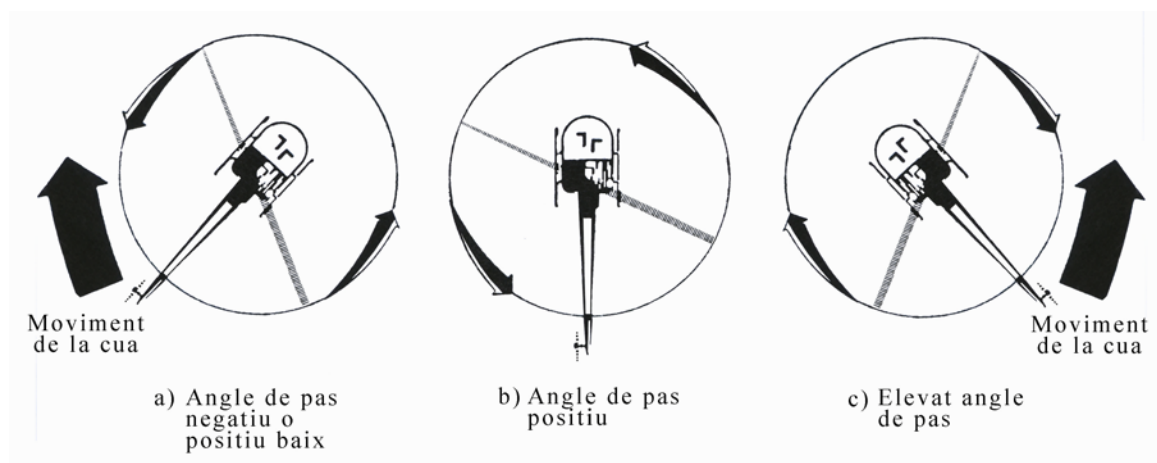
El control de gasos està situat a l'extrem davanter de la palanca de pas col·lectiu. Té forma d'empunyadura giratòria de motocicleta i la seva missió és regular les rpm del rotor principal. Si la unitat de sincronització de pas col·lectiu-gasos no manté automàticament les rpm del rotor constants quan s'està efectuant un canvi en la posició de la palanca, aquest comandament permet fer canvis addicionals en les revolucions del motor de forma manual girant l'empunyadura.

### **2.5.3. Pedals antiparell**

El rotor de cua i els pedals antiparell no només permeten al pilot contrarestar l'efecte del parell de reacció del rotor principal durant el vol, sinó també controlar el rumb de l'helicòpter durant el vol i actuacions en estacionari. Tanmateix, en el vol cap endavant els pedals no s'utilitzen per a controlar el rumb de l'helicòpter, sinó per a compensar l'efecte de parell i equilibrar longitudinalment l'helicòpter. En aquestes situacions, el control cíclic és el que permet variar el rumb.

La tracció produïda pel rotor de cua ve regulada per la posició dels pedals antiparell. Aquests estan units a un mecanisme de la caixa d'engrenatges del rotor de cua que permet al pilot augmentar o disminuir l'angle de pas de les pales d'aquest rotor i, per tant, variar la seva tracció. Desplaçant el pedal dret cap endavant de la seva posició de repòs, s'ajusta un angle de pas negatiu i la tracció del rotor de cua actua en el mateix sentit que el parell de reacció del rotor principal, provocant així una guinyada del morro cap a la dreta. La tracció tampoc no contraresta l'efecte de parell del rotor principal quan, amb un petit angle de pas positiu, el rotor de cua no produeix suficient tracció per a contrarestar-lo. Ambdues situacions queden reflectides en la Figura 2.14a.

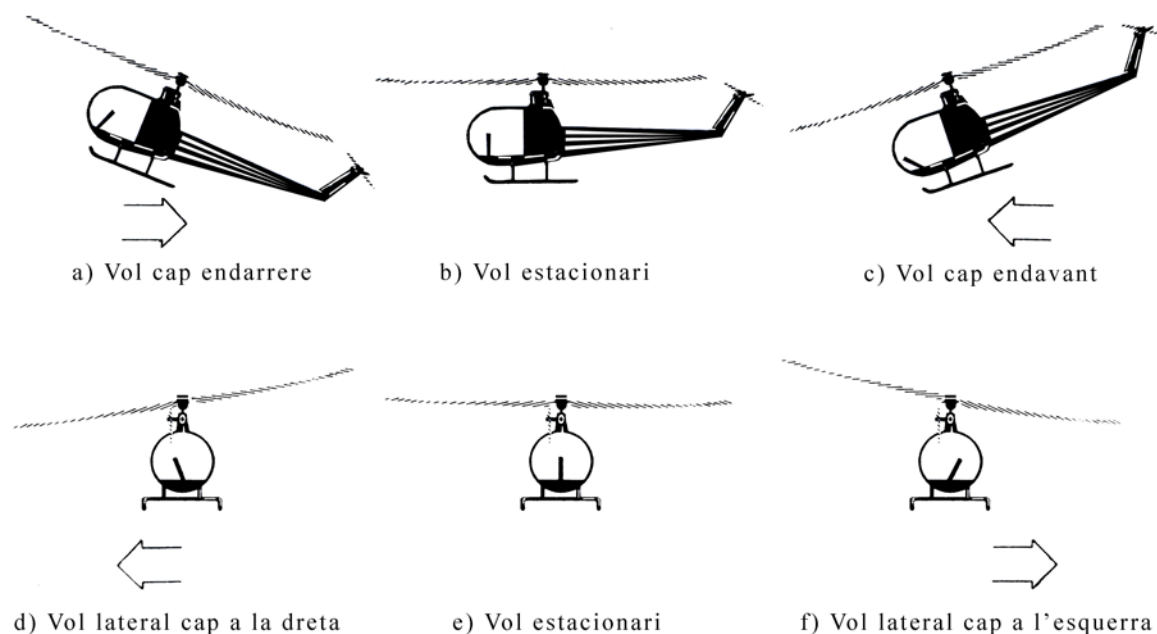
Amb els pedals en la posició de repòs, el rotor de cua té un angle de pas positiu i la seva tracció és aproximadament la necessària per tal d'equilibrar l'efecte del parell del rotor principal durant el vol, mantenint d'aquesta manera l'helicòpter en un rumb constant (vegeu la Figura 2.14b). Finalment, amb el pedal esquerre desplaçat a la seva posició més avançada, el rotor de cua està en una posició d'elevat angle de pas positiu i, aleshores, la seva tracció contraresta amb escreix l'efecte del parell de reacció. En aquesta situació, l'helicòpter guinya cap a l'esquerra (vegeu la Figura 2.14c).



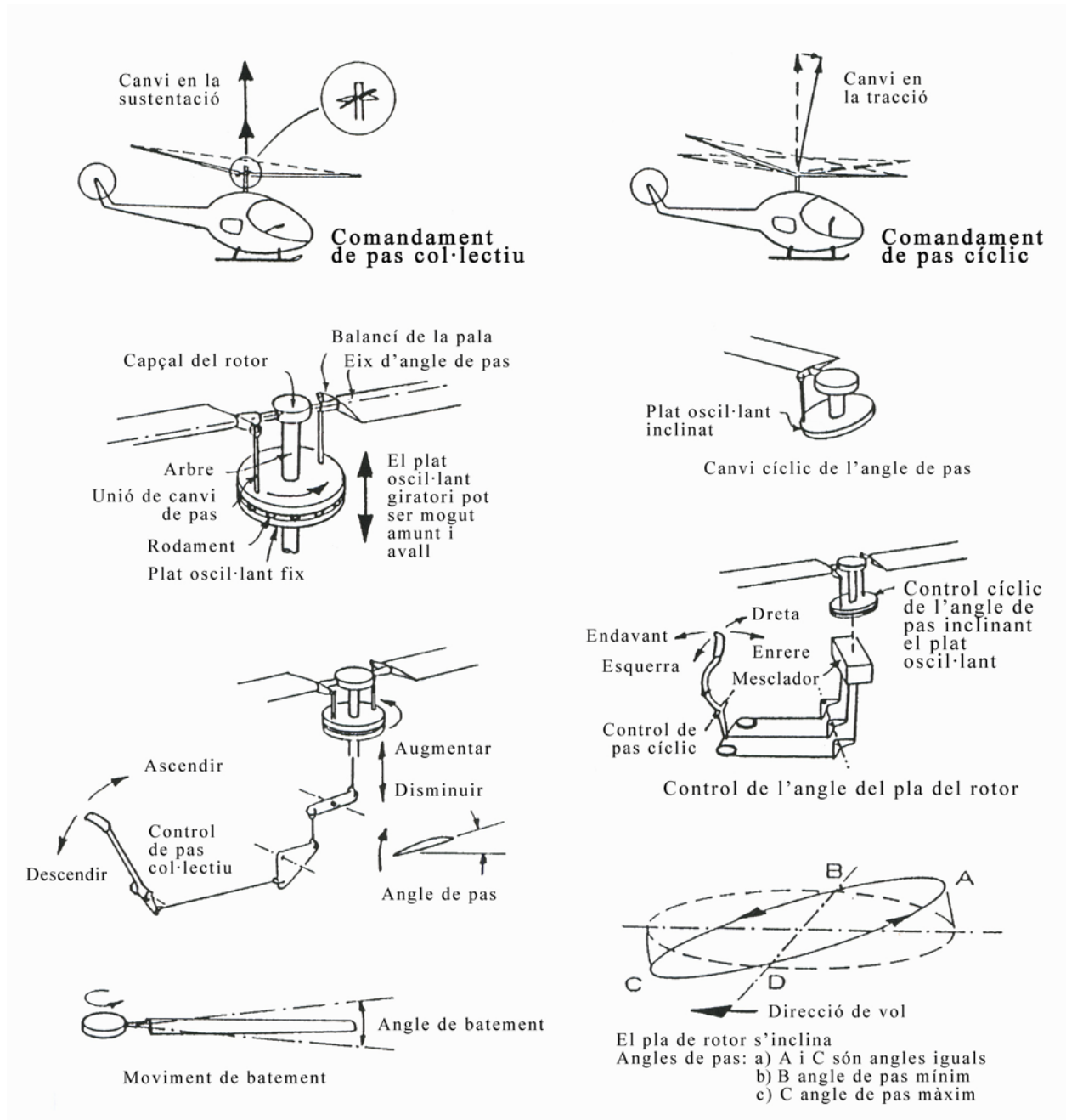
**Figura 2.14** Angle de pas i tracció del rotor de cua en relació amb la posició dels pedals  
(U.S. Department of Transportation 2006)

#### 2.5.4. Control de pas cíclic

La resultat de les forces de sustentació-tracció subministrada pel rotor principal és sempre perpendicular al pla de la punta de les pales. Quan aquest pla està inclinat respecte a la seva posició horitzontal, la força sustentació-tracció es divideix en dues components: una d'horitzontal, la tracció, i una de vertical, la sustentació.



**Figura 2.15** Relació entre la posició de la palanca de cíclic, la inclinació del disc del rotor i el moviment de l'helicòpter  
(U.S. Department of Transportation 2006)



**Figura 2.16** Control de la sustentació i de la tracció del rotor principal (Roed 1995)

L'objecte del comandament de pas cíclic és inclinar el pla de la punta de les pales en la direcció cap a la qual es desitja fer el desplaçament horitzontal, a fi que la component de tracció desplaci l'helicòpter en la direcció inclinada del rotor. El control de pas cíclic no exerceix cap efecte sobre la magnitud de la força total sustentació-tracció, només canvia la direcció d'aquesta força, controlant d'aquesta manera l'actitud i la velocitat de l'helicòpter. El disc del rotor s'inclina en la mateixa direcció en què és aplicada la pressió al cíclic: si la palanca del cíclic es mou cap endavant, el disc del rotor s'inclina cap endavant; si el cíclic es mou cap enrere, el disc de rotor s'inclina cap enrere, i així successivament (vegeu la Figura 2.15).

Inclinant el plat oscil·lant amb el cíclic, a part de variar el pla del rotor, també es veuen afectats els angles de pas en diferents punts d'aquest pla com mostra la Figura 2.16, on també estan resumits el control de la sustentació i de la tracció del rotor.

## 2.6. Estabilitat i moviments d'un helicòpter

Teòricament, un helicòpter pot moure's en qualsevol direcció. En un vol estacionari, totes les forces i moments s'equilibren entre sí i l'helicòpter resta quiet a certa altura o es mou a una velocitat constant en la direcció desitjada. En el moment en què la condició d'equilibri es veu pertorbada, sigui per una ràfega de vent o per un moviment dels controls, la velocitat i/o la trajectòria de vol de l'helicòpter també es veuen alterades: uns cops oscil·la en torn a la condició d'equilibri, altres varia fins la nova condició d'equilibri, i en d'altres divergeix de la condició d'equilibri fins que la divergència no és corregida per l'ordre d'algun controlador.

Quan es parla d'estabilitat és convenient dividir els **moviments lineals** de l'helicòpter en *longitudinal*, *vertical* i *lateral*; i els **angulars** en *capcineig* (en anglès, *pitch*), *balanceig* (*roll*) i *guinyada* (*yaw*), tal com s'aprecia en la Figura 2.17. Qualsevol helicòpter ha de poder realitzar girs al voltant de tres eixos (perpendiculars entre sí i amb el punt d'intersecció dels tres en el centre de gravetat de l'aeronau), i segons ho faci al voltant d'un o un altre, el moviment rep un nom diferent.

S'anomena *capcineig* a la rotació al voltant de l'eix lateral; *balanceig*, a la rotació al voltant de l'eix longitudinal, que s'estén des del morro fins a la cua de l'helicòpter; i finalment, *guinyada*, a la rotació sobre l'eix vertical, que passa pel centre de gravetat de l'aeronau i és perpendicular als eixos lateral i longitudinal.

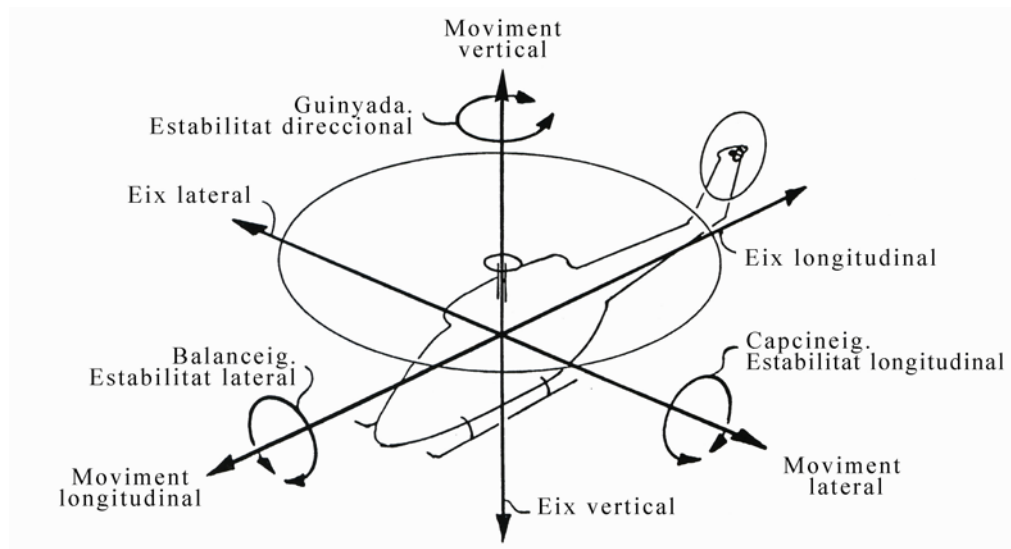


Figura 2.17 Eixos, moviments i estabilitat d'un helicòpter (Roed 1995)



Mitjançant el sistema de coordenades de la Figura 2.17, l'estabilitat de l'helicòpter pot dividir-se en tres tipus: l'*estabilitat longitudinal*, per a moviments al voltant de l'eix lateral; l'*estabilitat direccional*, per a moviments al voltant de l'eix vertical; i finalment, l'*estabilitat lateral*, per a moviments al voltant de l'eix longitudinal. Cada cop que una condició d'equilibri es veu pertorbada, l'aparell s'hauria de reequilibrar per sí sol en qualsevol dels tres eixos.

En vol estacionari, l'helicòpter és manté volant quasi immòbil sobre un punt de referència a altura i rumb constants. El pilot controla l'aparell amb el comandament cíclic, el manté a l'altura corresponent amb el control de pas col·lectiu coordinat amb el control de gasos (per tal de mantenir unes rpm constants), i sosté el rumb mitjançant els pedals.

En canvi, en el gir en estacionari, es manté l'altura i la posició sobre un punt de referència del terra però el morro de l'helicòpter gira cap a l'esquerra o cap a la dreta. Aquí, el pilot requereix la coordinació de tots els controls, especialment la dels pedals.



## Capítol 3. Modelització analítica del TRMS

En aquest capítol s'aborda la modelització analítica de la planta sota estudi, el *Twin Rotor MIMO System* (TRMS) de la casa Feedback Instruments Ltd. En primer lloc, es descriu l'equip i, a continuació, s'obtenen els diferents models analítics de les parts en què s'ha dividit per simplificar-ho. L'estructura d'aquests submodels es construeix en aplicació dels principis bàsics de la física, fet pel qual es revisen alguns conceptes físics. Finalment, a partir de les equacions matemàtiques que simulen el comportament de l'aparell, es construeix amb blocs SIMULINK un model global no lineal, amb el qual es realitzarà la identificació experimental dels paràmetres en el proper capítol.



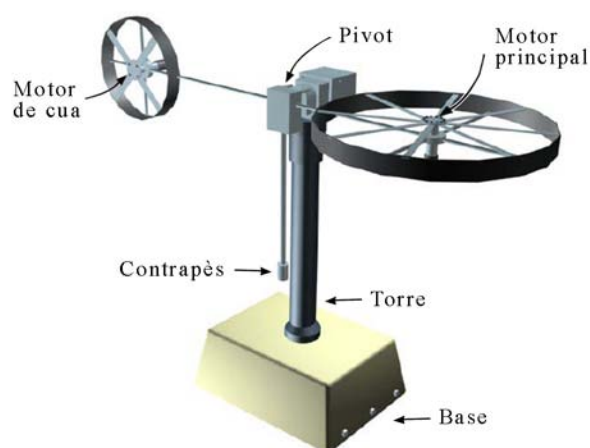
**Figura 3.1** El prototip d'helicòpter *Twin Rotor MIMO System* als peus de la Serra Major del Montsant (Priorat)

### 3.1. Descripció de l'equip

El *Twin Rotor MIMO System* és un prototip d'helicòpter amb algunes simplificacions importants respecte als helicòpters reals. En primer lloc, el TRMS està enganxat a una torre i, en segon i de gran rellevància, la posició i la velocitat de l'aparell vénen controlades mitjançant la variació de la velocitat dels rotors. Convé ressaltar que la velocitat dels rotors en un helicòpter real és pràcticament constant i la propulsió

varia amb la modificació de l'angle de pas de les pales del rotor. No obstant això, les característiques dinàmiques més importants presents en un helicòpter poden ser capturades en el prototip TRMS. Tal com ocorre en un helicòpter real, existeix un significatiu acoblament creuat entre els dos rotors: per exemple, si s'activa el motor principal —el rotor del qual fa variar la posició vertical—, l'helicòpter també gira en un pla horitzontal.

En terminologia de control, el TRMS és una excel·lent planta MIMO per a exercicis en el laboratori ja que disposa de dues entrades (els voltatges subministrats als rotors) i de dues sortides (angles de posició vertical i horitzontal). Tanmateix, també existeix la possibilitat —però no per defecte de fàbrica— d'accedir als tacòmetres situats en cada motor que capturen un voltatge proporcional a les seves velocitats angulars. Per això, també es pot considerar que el TRMS disposa de fins a quatre sortides. D'altra banda, el TRMS té dos graus de llibertat, ja que els dos rotors permeten girar al voltant de dos eixos, l'horitzontal i el vertical. Nogensmenys, dos cargols de plàstic permeten fixar l'aparell en cadascun dels plans, podent així utilitzar-lo com a planta d'un sol grau de llibertat. Per poder veure tot això amb més detall, a continuació es descriu el TRMS a tres nivells diferents: la part mecànica, la part elèctrica i la part de control i captura.



**Figura 3.2** Twin Rotor MIMO System (TRMS) en la posició de treball

### 3.1.1. Unitat mecànica

La unitat mecànica del TRMS reproduceix l'estructura de l'helicòpter. Consisteix en dos motors situats en una barra, juntament amb un contrapès, tal com mostra la Figura 3.2. La unitat està lligada a una torre permetent d'aquesta manera realitzar experiments de forma segura. En els extrems exteriors de cada braç hi ha dues hèlices de la casa Graupner impulsades cadascuna per un motor de corrent continu (CC) model A-max 110950 de la casa Maxon Motor. Per una banda, hi ha el rotor principal, que executa un impuls vertical i controla la posició vertical; i per l'altra, el rotor de cua, que realitza un impuls horitzontal i varia la posició horitzontal. Una junta articulada permet a l'estructura dels braços rotar al voltant de dos eixos

(el vertical i l'horitzontal) de tal forma que els motors es mouen en superfícies esfèriques. En la Taula 3.1 es presenten els paràmetres físics del TRMS relatiu a la unitat mecànica. Les característiques tècniques de les hèlices i dels rotors són detallades en l'annex.

Paràmetre	Valor		Paràmetre	Valor	
$m_{mr}$ (kg)	0,228	Massa del rotor i motor CC principals	$m_{tr}$ (kg)	0,206	Massa del rotor i motor CC de cua
$m_{ms}$ (kg)	0,225	Massa del protector principal	$m_{ts}$ (kg)	0,165	Massa del protector de cua
$m_m$ (kg)	0,015	Massa del braç principal	$m_t$ (kg)	0,016	Massa del braç de cua
$m_{rp}$ (kg)	0,042	Massa del rotor principal (pales)	$m_{rc}$ (kg)	0,016	Massa del rotor de cua (pales)
$m_{cb}$ (kg)	0,068	Massa del contrapès	$m_b$ (kg)	0,022	Massa de la barra del contrapès
$l_m$ (m)	0,254	Longitud del braç principal	$l_t$ (m)	0,275	Longitud del braç de cua
$l_{cb}$ (m)	0,255	Distància entre el pivot i el contrapès	$l_b$ (m)	0,255	Longitud de la barra del contrapès
$r_{ms}$ (m)	0,155	Radi del protector principal	$r_{ts}$ (m)	0,100	Radi del protector de cua
$l_{mw}$ (m)	0,026	Amplada de la pala del rotor principal	$l_{tw}$ (m)	0,017	Amplada de la pala del rotor de cua
$l_{ml}$ (m)	0,279	Llargada de la pala del rotor principal	$l_{tl}$ (m)	0,178	Llargada de la pala del rotor de cua

Taula 3.1 Paràmetres físics del TRMS (Christensen *et al.* 2006)

Dues posicions del TRMS tenen especial importància. Per una banda, la *posició de repòs* o *punt inicial*, que és la posició d'equilibri estable que té el TRMS quan les seves entrades són nul·les —és a dir, amb els motors apagats. En la configuració actual aquesta es troba a uns  $35^\circ$ – $40^\circ$  aproximadament per sota de l'eix horitzontal, però convé ressaltar que aquesta posició pot veure's afectada si es canvien les distàncies al pivot central dels rotors i del contrapès, i l'orientació dels plans dels rotors respecte al pivot. Per altra banda, la segona posició important, especialment si es treballa en el disseny de controladors, és la *posició de treball*, quan el braç principal és totalment horitzontal i paral·lel a la part davantera de la base del sistema, tal com mostra la Figura 3.2.

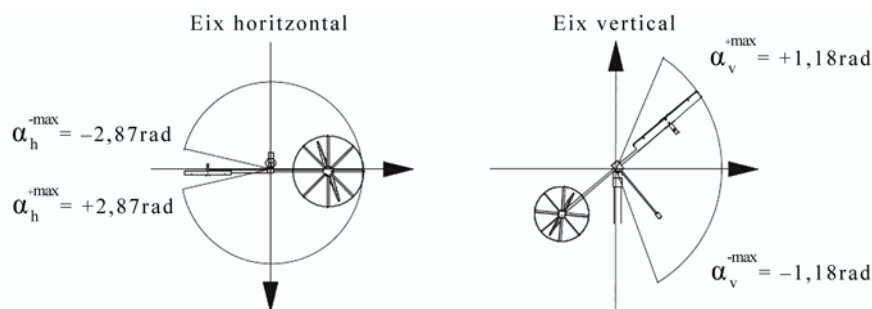


Figura 3.3 Angles màxims i mínims del TRMS en els plans horitzontal i vertical

Dos altres conceptes són també molt importants en el present projecte: el *pla horitzontal* i el *pla vertical* (vegeu la Figura 3.3). Sense entrar en detalls, el pla horitzontal és bàsicament la representació en planta o vista superior del TRMS, mentre que el pla vertical l'és en alçat o vista frontal (en l'apartat 3.5.2 es

defineixen formalment en el marc dels sistemes de referència). Com que el TRMS està subjecte a una torre, els moviments de l'aparell són limitats, tal com mostra la figura. En el pla horitzontal és capaç de girar un total de 5,74 rad (329,07°) mentre que en el vertical el ventall és de 2,36 rad (135,22°).

### 3.1.2. Unitat elèctrica

La unitat elèctrica, constituïda per la base on es subjecta la torre i tot el conjunt de cablejat (Figura 4.5), juga un paper molt important en el control del TRMS: permet transferir els senyals mesurats a l'ordinador així com aplicar-li el senyal de control que li arriba a través d'una targeta d'entrada/sortida (E/S).

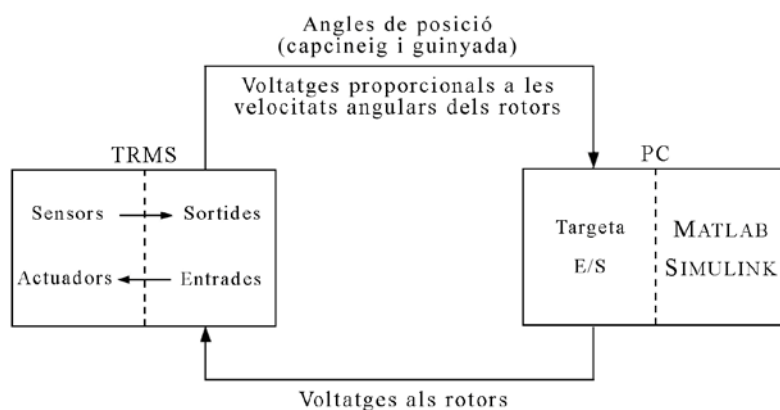


Figura 3.4 Unitat elèctrica del TRMS

### 3.1.3. Unitat de control i captura

La unitat de control (Figura 3.5) està constituïda per un ordinador PC, la targeta d'entrada/sortida PCI-1711 d'Advantech i l'entorn MATLAB/SIMULINK. Combinant els programaris de MathWorks i d'Advantech, la captura dels senyals i el control de l'aparell per al TRMS resulten força amigables.

Els senyals de control són voltatges d'entre  $-2,5\text{ V}$  i  $+2,5\text{ V}$  i són aplicats al TRMS per tal d'impulsar cada rotor. Voltatges positius fan girar les hèlices en un sentit antihorari, mentre que els negatius en el sentit contrari —l'horari. Des de l'entorn SIMULINK, el bloc *Feedback DAC* (Figura 3.6c), proporcionat pel fabricant, permet enviar el senyal de control en forma de voltatge a la targeta d'entrada/sortida, i aquesta al rotor corresponent. Per altra banda, els senyals a mesurar són de dos tipus: es pot accedir a la posició dels braços en l'espai, és a dir, a dos angles; i després, al voltatge en els tacòmetres dels rotors, que és proporcional a la velocitat de gir d'aquests.



**Figura 3.5** Esquema del sistema de control del TRMS

Els angles de posició\* es mesuren mitjançant dos codificadors incrementals digitals (dos HCTL 2016 de la casa Agilent) situats en cadascun dels eixos de gir del TRMS. La informació de la posició és transferida al PC mitjançant la unitat elèctrica i la targeta E/S a fi de poder treballar en l'entorn MATLAB i SIMULINK. En aquest entorn, el bloc *Feedback Encoder* (Figura 3.6b), també proporcionat pel fabricant, recull dels codificadors la posició dels rotors en radians en ambdós plans perpendiculars. Cal tenir en compte que, cada cop que s'inicia una simulació, el TRMS ha d'estar en la posició de repòs sense moviment, ja que el codificador incremental mesura posicions relatives, situant el valor zero en aquesta posició inicial. Per a informació més detallada sobre el funcionament intern dels blocs de la casa Feedback, llegiu el manual d'instal·lació proporcionat pel fabricant (Feedback Instruments 2009).

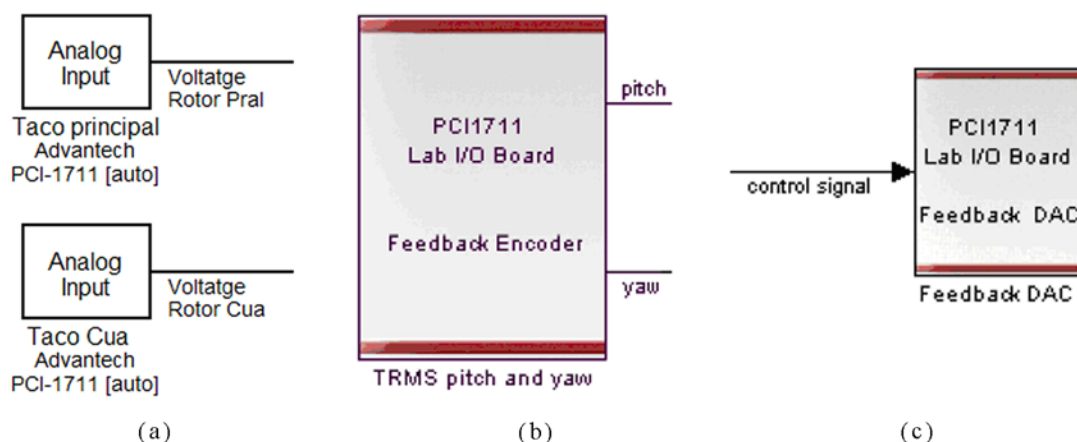
Dos cargols de plàstic situats en el propi aparell permeten bloquejar els codificadors incrementals del TRMS i que la targeta E/S no accedeixi a les dades de cadascun d'ells. Per una banda, el cargol de la posició vertical, situat a l'esquerra del pivot. I per l'altra, el de la posició horitzontal, situat a la dreta en la torre. Aquest darrer, a més, bloqueja l'aparell en una posició horitzontal fixa i el seu moviment queda reduït exclusivament al pla vertical.

Cadascun dels motors disposa d'un tacòmetre model DCT-22 de la casa Maxon Motor que facilita un voltatge proporcional a la velocitat de gir del rotor (vegeu les seves característiques tècniques en l'annex). Malauradament, el programari subministrat pel fabricant no permet accedir per defecte als seus senyals. Mentre que en versions anteriors del programari del TRMS (Feedback Instruments 1998a, 1998b) el fabricant sí que proveïa blocs SIMULINK amb què accedir als tacòmetres, aquests no es subministren en la versió amb què s'ha treballat en el present projecte. Per aquest fet, s'ha recorregut a la utilització de blocs genèrics del conjunt d'eines *Real-Time Windows Target* v.2.6 de SIMULINK que tenen com a objectiu la recollida de dades des d'alguna targeta E/S. S'han configurat dos blocs *Analog Input* (Figura 3.6a) per tal

\* Definits matemàticament en l'apartat 3.5.2

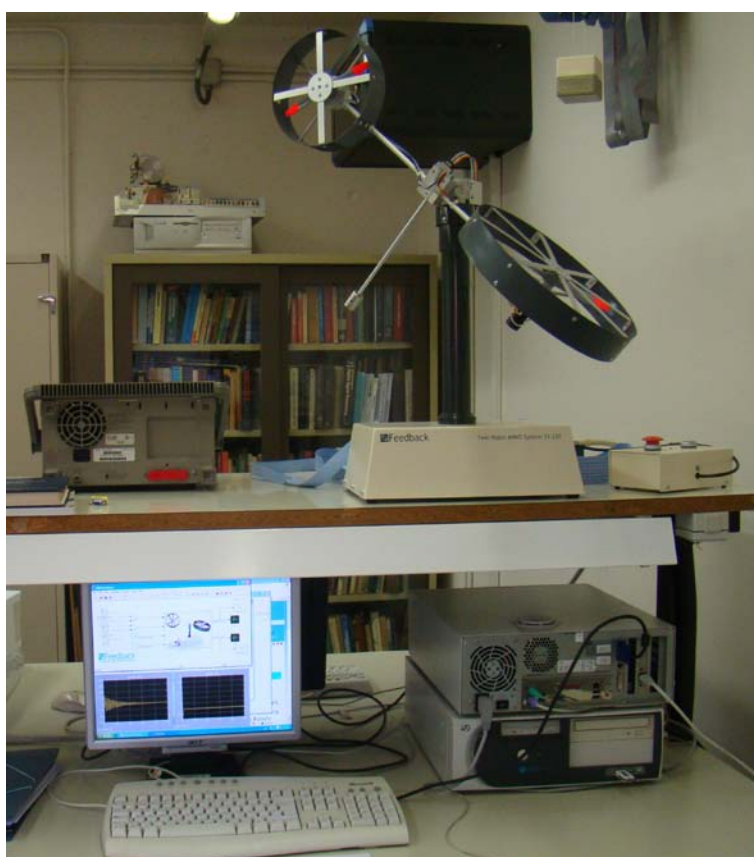


de capturar els voltatges en el rotor de cua (canal 1 de la PCI-1711) i en el rotor principal (canal 2 de la PCI-1711).



**Figura 3.6** Blocs SIMULINK d'interacció amb el TRMS:

a) *Analog Input* (rotor principal i rotor de cua) b) *Feedback Encoder*; c) *Feedback DAC*



**Figura 3.7** Equip de laboratori utilitzat en el present projecte

### 3.1.4. Muntatge del TRMS

Per al muntatge i posta a punt del TRMS es poden seguir les directrius del manual d'instruccions (Feedback Instruments 2009). En primer lloc es procedeix al muntatge de la pròpia estructura física. El



TRMS no venia de fàbrica totalment desmuntat, sinó que les principals parts ja estaven armades. A continuació s'instal·la tant el programari d'Advantech referent a la targeta E/S PCI-1711 com el de Feedback Instruments relatiu als conjunts d'eines i exemples de MATLAB/SIMULINK emprats en el control del TRMS.

Finalment, es realitzen les diferents connexions del maquinari, entre l'ordinador i un adaptador SCSI (*Small Computer System Interface*), i entre aquest i el propi aparell. Amb tot això, l'aparell queda a punt per a realitzar qualsevol experiment. Per a un primer contacte amb el TRMS, és molt aconsellable seguir els experiments guiats del manual de l'aparell (Feedback Instruments 2006a), on s'hi exposen un procés d'identificació en *black box* i el disseny de controladors senzills. En la Figura 3.7 podeu observar l'equip de laboratori muntat i a punt per ser utilitzat en el present projecte.

### 3.1.5. El TRMS: un helicòpter simplificat

El comportament del TRMS s'assembla, en certs aspectes, al d'un helicòpter, del que s'han explicat les característiques principals en el Capítol 2. Consegüentment, es pot considerar aquest aparell de laboratori com un helicòpter, però amb les simplificacions que es detallen a continuació.

- El TRMS simula un helicòpter d'un sol rotor principal i d'un rotor de cua antiparell.
- L'aparell es troba subjecte a una torre, la qual cosa impossibilita el moviment vertical.
- El plat oscil·lant del rotor principal és fix i perpendicular a l'arbre de l'eix, la qual cosa implica la inexistència de control cíclic i, per tant, tampoc hi ha moviments longitudinals ni laterals.
- Les pales no permeten el moviment de batement ni el d'arrossegament ni el de canvi de pas.
- Amb la intenció de substituir l'efecte dels angles de pas i d'atac de les pales i de poder variar la sustentació de cada rotor, la velocitat de rotació dels motors d'aquest aparell és variable. Llavors, ni les característiques del control col·lectiu ni les dels pedals antiparell, que són les que fan variar els anteriors angles, hi són presents.
- Els únics moviments angulars que pot realitzar l'aparell són el de capcineig i el de guinyada; el de balanceig, al voltant de l'eix longitudinal, no es contempla.
- La posició de treball del TRMS permet simular el vol i gir estacionaris (en estàtic) en condicions atmosfèriques normals. No es tenen en compte variables tan importants en el món real com són la densitat de l'aire, la temperatura o la velocitat del vent.

## 3.2. Estratègia de modelització

### 3.2.1. Justificació del model newtonià

Actualment, amb les eines i mètodes de càlcul disponibles, modelitzar, identificar i obtenir models fiables basant-se només en l'experimentació i eludint el coneixement *a priori*, és una tasca que ha millorat considerablement en els darrers anys. Prova d'això són els diversos treballs en què els autors modelitzen el TRMS de les més heterogènies maneres: models newtonians, models lagrangians, models LPV (*Linear Parameter Varying*), models paramètrics, models de xarxes neuronals, etc. —vegeu l'apartat 1.3 per a més detalls.

El TRMS és un sistema bastant complex però malgrat això, la seva idiosincràsia permet obtenir de forma bastant acurada coneixement *a priori* mitjançant l'aplicació de les lleis de Newton. Així mateix, el primer manual del TRMS (Feedback Instruments 1998b) ja optava per la via newtoniana tot i que de forma bastant simplificada. No obstant això, atès que el model del sistema subministrat pel fabricant (Feedback Instruments 2006a) tampoc representa el comportament dinàmic amb precisió a causa de la seva simplicitat i que no té en consideració totes les forces que hi actuen (Rahideh i Shaheed 2007), s'ha optat per desenvolupar i adaptar el model que proposen Rahideh i Shaheed (2007, 2008a) al nostre aparell de laboratori i, per tant, continuar en la línia newtoniana.

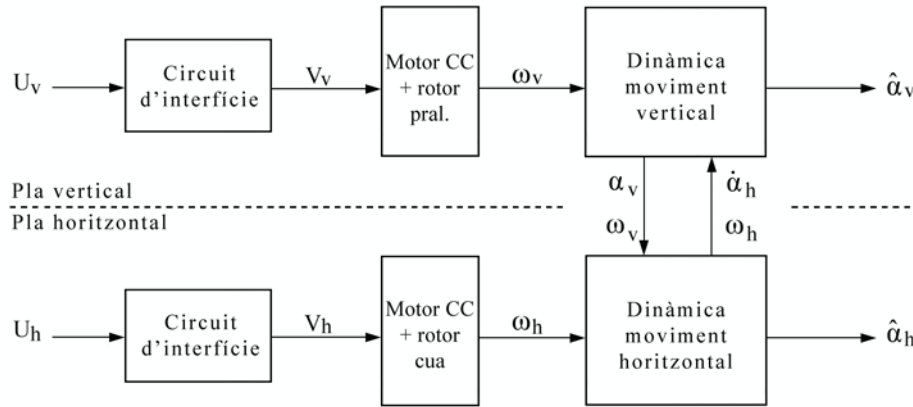
### 3.2.2. Diagrama de blocs general

Un model MIMO pot ser descompost en diversos models més senzills, un per a cada sortida, per tal que l'estudi del sistema pugui ser dut a terme d'una forma més entenedora (Nelles 2001). A més, el fet d'utilitzar aquestes sortides o d'altres variables internes com a entrades d'aquests models més senzills —és a dir, considerant les influències entre diferents subsistemes— permet millorar l'exactitud del model global, sobretot quan les sortides estan correlades entre sí. Un bon exemple d'això és quan en l'anàlisi d'aquests sistemes MIMO s'estudien, en primer lloc, els parells d'entrada/sortida i, posteriorment, els acoblaments de les diferents combinacions d'entrades i sortides.

Per aquesta raó s'opta per l'estratègia de modelització d'estudiar el moviment del TRMS en els dos plans perpendiculars, l'horitzontal i el vertical, tal com s'observa en la Figura 3.8. En cadascun d'ells es modelitzen principalment dues etapes: en la primera, el motor CC, i en la segona, la dinàmica del TRMS tot aplicant les lleis del moviment de Newton.

Les entrades globals al sistema són voltatges —un per a cadascun dels motors:  $U_v$  al rotor principal i  $U_h$  al rotor de cua—, mentre que les sortides globals són l'angle de posició en cada pla —el de capcineig o *pitch* ( $\alpha_v$ ) per al moviment vertical, i el de guinyada o *yaw* ( $\alpha_h$ ) per al moviment horitzontal. Abans de cada model CC, que relaciona voltatge i velocitat angular de les pales, també s'hi considera l'adaptació dels

voltatges que suposa el circuit d'interfície. Els submodels relatius a la dinàmica del TRMS són fruit de la segona llei de Newton per a la rotació a fi d'obtenir les posicions corresponents a partir de les velocitats angulars dels rotors.



**Figura 3.8** Diagrama de blocs de l'estratègia en la modelització del TRMS

Tanmateix, a causa de l'acoblament creuat entre rotors, l'anàlisi en cadascun dels plans no és independent de l'altre pla i, per aquesta raó, també es tenen en compte aquestes relacions (Figura 3.8). Com es reflectirà analíticament en els apartats 3.7.1 i 3.8.1, la posició de capcineig  $\alpha_v$  i la velocitat angular del rotor principal  $\omega_v$  tenen influència directa en el moviment en el pla horitzontal i, d'igual manera però amb menor impacte, la velocitat del rotor de cua  $\omega_h$  i la velocitat de guinyada  $\dot{\alpha}_h$  tenen efectes sobre el moviment en el pla vertical.

### 3.3. Modelització del circuit d'interfície

El circuit d'interfície és el conjunt de dispositius i cablejat que connecten l'entorn de control —el SIMULINK— amb el sistema real —el TRMS. Segons apunten Rahideh i Shaheed (2007), cal tenir en compte les notables diferències entre els valors del voltatge d'entrada als motors en el SIMULINK ( $U_h$  i  $U_v$ ) i els del voltatge en els terminals reals dels motors ( $V_h$  i  $V_v$ ). Per modelitzar aquesta etapa preliminar cal considerar les relacions no lineals entre els dos conjunts de dades i, per aquest motiu, es combinen un guany, un voltatge residual i un saturador, segons s'aprecia en la Figura 3.9.

La justificació de l'existència del petit voltatge residual té el seu origen en els treballs de laboratori. Aquests han permès constatar que els rotors principal i el de cua giren lleugerament quan el TRMS té les entrades a zero, sense arribar a provocar cap moviment global en l'helicòpter. Es desconeixen les causes exactes que provoquen aquest fet, que és de naturalesa força aleatòria.

També cal tenir present que la targeta PCI accepta diferents marges en el voltatge d'entrada ( $\pm 10$  V,  $\pm 5$  V i  $\pm 2,5$  V), i que és ella mateixa la que s'encarrega de fer un escalat, segons cada configuració, i entregar un senyal adequat al TRMS. En el present projecte el marge d'actuació d'entrada és el de  $\pm 2,5$  V, raó per la qual el bloc saturador evitarà les inestabilitats d'algun senyal que sobrepassi aquest marge.

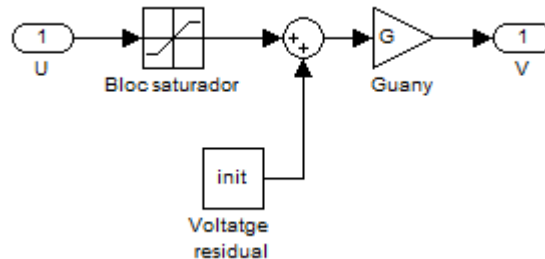


Figura 3.9 Diagrama de blocs SIMULINK de l'etapa preliminar del TRMS

Els valors establerts per defecte d'aquests paràmetres són: per al rotor principal,  $G_v = 8,5$  V i  $init_v = 0$  V; i per al rotor de cua,  $G_h = 6,5$  V i  $init_h = -0,025$  V. Els valors dels guany són els proposats per Rahideh i Shaheed (2007), malgrat que en el proper capítol seran reajustats mitjançant la identificació experimental. Els límits superior i inferior d'ambdós saturadors són  $\pm 2,5$  V.

### 3.4. Modelització dels motors de corrent continu

El corrent elèctric i els camps electromagnètics poden interactuar de diverses maneres segons assenyala la teoria electromagnètica, sostinguda pels principis descoberts per investigadors com Ampère, Faraday, Weber i Tesla, entre d'altres. El model no lineal que es descriu tot seguit inclou les característiques tant elèctriques com mecàniques dels motors de corrent continu.

El present apartat està basat en explicacions de Close i Frederick (1978), de Beachley i Harrison (1978), de Franklin, Powell i Emami-Naeini (1991), de Gettys, Keller i Skove (1991), de Tipler i Mosca (2005b), de Christensen *et al.* (2006), de Balderud (2002) i de Gabriel (2008) a fi de justificar els principis que sustenten les equacions en què es fonamenta el model de motor presentat per Rahideh i Shaheed (2007).

#### 3.4.1. Propietats elèctriques d'un motor CC

Per començar, es presenten unes pinzellades sobre les equacions que permeten expressar les variables mecàniques —força, moment i velocitat angular— en termes de variables elèctriques —corrent i voltatge. Els motors del TRMS són motors d'imant permanent en els quals circula un corrent elèctric a través d'un fil conductor en forma rectangular. Cal recordar que l'imant és un material que, gràcies a les propietats elèctriques de les molècules que el constitueixen, genera un camp magnètic de forma permanent.

### Llei del motor

Suposem en primer lloc que una càrrega  $q$  es mou a una velocitat  $\mathbf{v}$  en un camp magnètic d'intensitat  $\mathbf{B}$ . Llavors, s'experimenta sobre la càrrega una força magnètica  $\mathbf{F}$  tal que:

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad [\text{N}] \quad (3.1)$$

Aquesta força rep el nom de *força de Lorentz* i és la base del funcionament d'aquest tipus de motors. Aleshores, quan un corrent elèctric d'intensitat  $i$  amperes circula a través d'un conductor situat a l'interior d'un camp magnètic, la força magnètica resultant exercida sobre totes les càrregues pot escriure's de la següent forma:

$$\mathbf{F} = i\mathbf{L} \times \mathbf{B} \quad [\text{N}] \quad (3.2)$$

on  $\mathbf{L}$  és un vector de direcció paral·lela al corrent i de mòdul, la longitud del fil en metres. En l'anterior expressió es considera que el segment de cable és recte i que el camp magnètic no varia en tota la seva longitud.

El primer principi en què estan basats aquests motors s'expressa en l'equació (3.3), l'anomenada **lleis del motor**, que relaciona força i corrent elèctric. Generalment, en els motors CC els conductors estan col·locats de forma perpendicular al camp magnètic, que acostuma a ser unidireccional. En efecte, quan un corrent d' $i$  amperes circula per un conductor rectangular de longitud  $l$  metres disposat en un camp magnètic de  $B$  tesles, es crea sobre aquest conductor una força —perpendicular al camp magnètic i al corrent— que té magnitud:

$$F = B \cdot l \cdot i \quad [\text{N}] \quad (3.3)$$

Llavors, assumint que en un motor CC hi ha diversos conductors subjectes i agrupats al voltant de l'eix de gir, cadascun d'ells es veu sotmès a l'anterior força, amb la consegüent rotació d'aquests i l'aparició del *parell de força electromagnètica* ( $M_e$ ). La magnitud d'aquest moment és:

$$M_e = N \cdot R \cdot F = NRBl \cdot i_a = k_m i_a \quad [\text{N} \cdot \text{m}] \quad (3.4)$$

on es veu palesa la seva proporcionalitat amb el corrent en els conductors en un factor  $k_m$  anomenat *constant del motor* [N·m/A]. Aquest factor engloba diversos components com ara el número de conductors ( $N$ ), les seves longituds ( $l$ ), les distàncies a l'eix ( $R$ ) i la intensitat del camp magnètic ( $B$ ). El subíndex  $a$  del corrent  $i_a$  fa referència a l'*armature*, nom que en anglès també rep el rotor, que és la part mòbil i giratòria del motor.

### Llei del generador

La *força electromotriu* (fem) és, formalment, el treball per unitat de càrrega d'un generador. Aquesta denominació constitueix un abús del llenguatge ja que no es tracta d'una força en el sentit físic clàssic, tal com indiquen les seves unitats —indistintament [V] o [N·m/C]. Tanmateix, en el context dels motors CC fa referència a la *fem induïda* (o *força contraelectromotriu*, fcem), és a dir, a la diferència de potencial produïda per la variació del flux magnètic a l'interior d'un circuit.

Segons les lleis de Faraday i de Lenz, la fem induïda en un circuit tancat és proporcional a la variació temporal del flux magnètic que el travessa, a més d'oposar-s'hi ( $f_{cem} = -d\Phi_B/dt$ , on  $\Phi_B$  és el flux del camp magnètic  $\mathbf{B}$ ). Pel que fa als motors d'imant permanent, malgrat que el camp magnètic és pràcticament constant, la rotació dels conductors fa que el flux magnètic aparenti variar, fet pel qual s'indueix aquesta diferència de potencial. En el cas particular que un conductor es mou a través d'un camp magnètic, la fem induïda també pot anomenar-se *fem de moviment*.

L'equació general de la fcem en un circuit tancat és:

$$\varepsilon = \oint_C (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} \quad [\text{V}] \quad (3.5)$$

on  $\mathbf{v}$  és la velocitat d'un conductor que es mou dins del camp magnètic  $\mathbf{B}$ . Ara bé, si aquest conductor de longitud  $l$  es mou amb una velocitat  $v$  de forma perpendicular al camp  $\mathbf{B}$ , llavors la diferència de potencial induïda (o voltatge induït) en els extrems del conductor és:

$$|\varepsilon| = B \cdot l \cdot v \quad [\text{V}] \quad (3.6)$$

Aquesta és l'anomenada **lei del generador**, el segon principi en què es basa el funcionament del motor CC. Aleshores, atès que el motor CC està compost per diversos conductors al voltant de l'eix de rotació, el voltatge total induït en el rotor ( $E_a$ ), que relaciona voltatge i velocitat angular, és:

$$E_a = k_e \omega_a \quad [\text{V}] \quad (3.7)$$

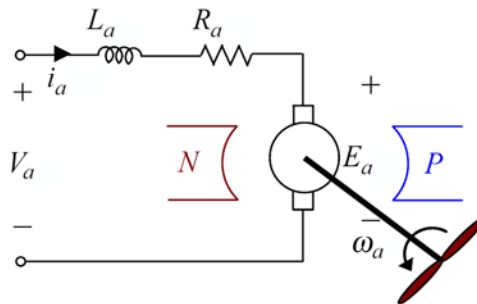
on  $k_e$  és la *constant elèctrica del motor*. Aquest factor inclou el número de conductors, les seves longituds, les distàncies a l'eix i la intensitat del camp magnètic. Tant Rahideh i Shaheed (2007), Christensen *et al.* (2006) com Franklin, Powell i Emami-Naeini (1991) coincideixen en què la constant del motor  $k_m$  i la constant elèctrica  $k_e$  tenen el mateix valor, com normalment ocorre en els motors d'imant permanent. És per això que a partir d'aquest punt ambdues constants passen a igualar-se i anomenar-se  $k_a$ . Noteu, doncs, que les unitats de  $k_a$  poden ser expressades tant en [N·m/A] com en [V·s]. Així mateix, val

la pena recordar que els subíndex  $a$  dels símbols anteriors fan referència a la paraula *armature*, denominació anglesa de rotor.

En un sentit físic, quan el rotor comença a girar, apareix una tensió d'oposició, la  $f_{cem}$ , que va creixent fins que s'igualava al voltatge d'entrada. És en aquest punt quan el corrent en el rotor passa a ser zero, el parell de la força electromagnètica s'anul·la, i la velocitat de gir es fa constant (velocitat de buit).

#### Equivalent elèctric del rotor

El rotor, com qualsevol altre conductor elèctric, presenta una resistència òhmica  $R_a$  i una inductància  $L_a$ , segons pot apreciar-se en la Figura 3.10. Convé ressaltar, però, que l'equivalent elèctric de la resistència podria ser modelitzada com una pendent no lineal, però que per motius de senzillesa s'ha considerat una relació totalment lineal.



**Figura 3.10** Equivalent elèctric del motor CC

De l'anterior figura és fàcil obtenir l'equació diferencial que descriu l'equivalent elèctric del motor CC, segons reflecteix l'equació (3.8). Aquesta expressió relaciona el voltatge aplicat al motor  $V_a$  amb la velocitat angular  $\omega_a$  en el motor, fent així de pont entre la part elèctrica i la mecànica del motor CC.

$$V_a = E_a + R_a i_a + L_a \frac{di_a}{dt} \quad [V] \quad (3.8)$$

Llavors,

$$V_a = k_a \omega_a + R_a i_a + L_a \frac{di_a}{dt} \quad [V] \quad (3.9)$$

#### 3.4.2. Propietats mecàniques d'un motor CC

La part mecànica del motor CC consisteix en l'eix del motor directament connectat al rotor i a les pales. L'equivalent mecànic es pot representar mitjançant un sistema dinàmic rotatori, que consisteix en una massa giratòria (de moment d'inèrcia  $J_r$ ) a la que s'hi oposen un amortidor giratori i la fricció aerodinàmica, als quals el rotor ha de vèncer per poder girar.

En aplicació de la segona llei de Newton per a la rotació, el moment resultant sobre el motor serà directament proporcional a l'acceleració angular d'aquest. Llavors,

$$M_e - M_f - M_L = J_r \frac{d\omega_a}{dt} \quad [\text{N}\cdot\text{m}] \quad (3.10)$$

on  $M_e$  és el parell de força electromagnètica lliurat pel motor de l'equació (3.4),  $M_f$  és el moment de fricció mecànica,  $M_L$  és el moment de fricció aerodinàmica,  $J_r$  és el moment d'inèrcia total d'allò que gira —que inclou el propi rotor i les pales— i  $\omega_a$  és la velocitat angular a la que gira el rotor.

El moment de la força de fricció mecànica pot modelar-se com a fregament viscos, que consisteix en una oposició al moviment de forma lineal a la velocitat angular. Convé ressaltar que s'ha optat per eludir altres tipus de fregament, com ara el de Coulomb —constant i independent de la velocitat— o l'estàtic —en velocitats molt properes al zero—, davant la complexitat que presentava la introducció d'aquestes característiques. A efectes pràctics, el moment relatiu al fregament viscos ja és una bona aproximació a la realitat ja que presenta una proporcionalitat amb la velocitat de la forma següent:

$$M_f = B_r \omega_a \quad [\text{N}\cdot\text{m}] \quad (3.11)$$

on  $B_r$  és el coeficient d'esmoreïment del rotor i té unitats  $[\text{N}\cdot\text{s}\cdot\text{m}/\text{rad}]$ .

Pel que fa al moment de fricció aerodinàmica, molts investigadors han elaborat detallats estudis sobre el flux d'aire al voltant d'un propulsor i de quina manera afecta aquest a la rotació del rotor. Com que en aquest cas és impossible copsar la complexitat d'un model de càrrega que tingui en compte aquests aspectes, s'ha optat per una aproximació àmpliament utilitzada en la indústria automobilística en què aquest moment es modelitza de forma proporcional al quadrat de la velocitat. Rahideh i Shaheed (2007) proposen la següent expressió:

$$M_L = k_L \cdot \text{sign}(\omega_a) \cdot \omega_a^2 \quad [\text{N}\cdot\text{m}] \quad (3.12)$$

on  $k_L$  és un coeficient positiu amb unitats  $[\text{N}\cdot\text{m}\cdot\text{s}^2/\text{rad}^2]$  que engloba les propietats de l'aire i la geometria de les pales, entre d'altres.

Considerant les equacions (3.4), (3.10), (3.11) i (3.12), l'equació diferencial relativa a la part mecànica del motor CC és la següent:

$$k_a \dot{i}_a = k_L \cdot \text{sign}(\omega_a) \cdot \omega_a^2 + J_r \frac{d\omega_a}{dt} + B_r \omega_a \quad [\text{N}\cdot\text{m}] \quad (3.13)$$



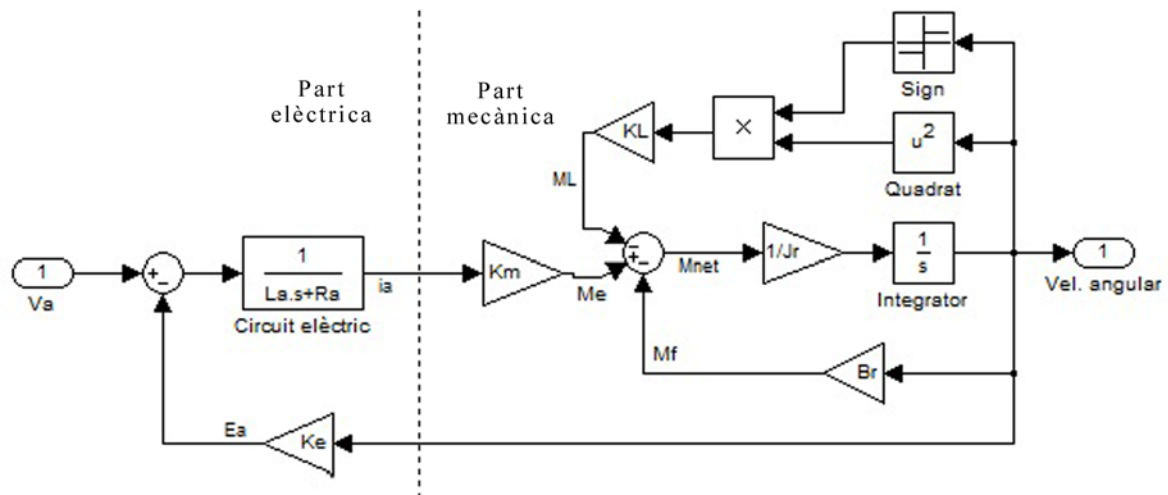
### 3.4.3. Els motors del TRMS

El TRMS posseeix, com ja s'ha dit, dos motors de corrent continu, un pel propulsor principal i l'altre pel de cua. Ambdós motors són idèntics però en ells hi actua diferent fricció aerodinàmica (tot i que també es podria considerar que sostenen diferent càrrega mecànica) i és per això que, tot i compartir la mateixa estructura, difereixen en els valors d'alguns paràmetres.

Així doncs, cadascun dels motors queda descrit per les equacions (3.9) i (3.13), a partir de les quals es pot construir un diagrama de blocs SIMULINK (Figura 3.11). En la Taula 3.2 s'aprecien els valors dels paràmetres per a cada motor, segons Rahideh i Shaheed (2007). Alguns d'ells han servit com a punt inicial en el seu reajustament mitjançant el procés d'identificació experimental per tal d'obtenir un bon model dels motors del TRMS.

Paràmetre (pral.)	Valor	Paràmetre (cua)	Valor
$R_{av}$ ( $\Omega$ )	8	$R_{ah}$ ( $\Omega$ )	8
$L_{av}$ (H)	$8,6 \cdot 10^{-4}$	$L_{ah}$ (H)	$8,6 \cdot 10^{-4}$
$k_{av}$ (N·m/A)	0,0202	$k_{ah}$ (N·m/A)	0,0202
$J_{mr}$ (kg·m <sup>2</sup> )	$0,1272 \cdot 10^{-3}$	$J_{tr}$ (kg·m <sup>2</sup> )	$0,0248 \cdot 10^{-3}$
$B_{mr}$ (N·s·m/rad)	$4,5 \cdot 10^{-5}$	$B_{tr}$ (N·s·m/rad)	$2,3 \cdot 10^{-5}$
$k_{Lv}$ (N·m·s <sup>2</sup> /rad <sup>2</sup> )	$8,7 \cdot 10^{-7}$	$k_{Lh}$ (N·m·s <sup>2</sup> /rad <sup>2</sup> )	$3,6 \cdot 10^{-7}$

**Taula 3.2** Valors originals dels paràmetres dels models dels motors CC  
Principal (1a columna) i de cua (2a columna), segons Rahideh i Shaheed (2007)



**Figura 3.11** Diagrama de blocs del sistema no lineal d'un motor CC amb fricció aerodinàmica

### 3.4.4. Tacòmetres

Atès que la targeta d'entrada/sortida permet accedir als senyals dels tacòmetres DCT-22 instal·lats en cada motor del TRMS, cal modelitzar també el seu comportament per tal de dur a terme la correcta identificació experimental dels motors. Tanmateix, convé ressaltar que aquests models dels tacòmetres són exclusius d'aquest procés i que, un cop construïts els models dels motors, s'eludeixen en el model

global. En les etapes posteriors, relatives a la dinàmica del TRMS, només són necessàries les velocitats dels rotors —que corresponen a la sortida dels models dels motors— i no els voltatges en els tacòmetres.

Així doncs, els tacòmetres —que faciliten un voltatge proporcional a la velocitat de gir del rotor— han estat modelitzats per senzillesa de forma lineal com un guany escalar simple:  $G_{tv}$  per al tacòmetre del motor principal i  $G_{th}$  per al de cua. Encara que aquests no recullin tota la dinàmica no lineal, sí que és una molt bona aproximació per passar de les centenes de rad/s a les unitats de volts. Els valors dels guanys s'han establert mitjançant un procés d'identificació experimental previ al dels motors, comptant amb l'ajuda d'un altre tacòmetre —ara òptic— que mesura la velocitat de les pales dels rotors en rpm (vegeu els apartats 4.4 i 4.5). Podeu trobar les característiques tècniques dels tacòmetres —dels DCT-22 i de l'òptic— en l'annex.

### 3.5. Conceptes bàsics de mecànica rotacional i sistemes de referència

#### 3.5.1. Conceptes bàsics de mecànica rotacional

A continuació es presenten una sèrie de conceptes, definicions i expressions, extretes de Tipler i Mosca (2005a), que s'utilitzen al llarg del procés de construcció del model newtonià del TRMS.

L'expressió del **moment d'una força** o **parell** que actua sobre un objecte que està obligat a girar respecte a cert eix ve donada pel producte del valor de la component tangencial d'aquesta força i el de la distància radial a l'eix de rotació:

$$\tau = F_t \cdot r \quad [\text{N} \cdot \text{m}] \quad (3.14)$$

El **moment d'inèrcia** és una magnitud escalar que reflexa la distribució de masses respecte a l'eix de gir d'un cos o d'un sistema de partícules en rotació. El moment d'inèrcia només depèn de la geometria del cos i de la posició de l'eix de gir, però no depèn de les forces que intervenen en el moviment. El moment d'inèrcia d'un sistema de partícules discretes (de massa  $m_i$  i distància a l'eix  $r_i$ ) es calcula:

$$J = \sum_i m_i r_i^2 \quad [\text{kg} \cdot \text{m}^2] \quad (3.15)$$

El moment d'inèrcia d'una barra uniforme (d'espessor menyspreable) de longitud  $L$  i massa  $M$  al voltant d'un eix perpendicular a la barra que passa per un dels seus extrems és:

$$J = \frac{1}{3} ML^2 \quad [\text{kg} \cdot \text{m}^2] \quad (3.16)$$

El moment d'inèrcia d'un cilindre buit de paret prima, longitud  $L$ , radi  $R$  i massa  $M$  respecte al seu propi eix és:

$$J = MR^2 \quad [\text{kg} \cdot \text{m}^2] \quad (3.17)$$

El moment d'inèrcia d'un cilindre buit de paret prima, longitud  $L$ , radi  $R$  i massa  $M$  respecte a un eix-diàmetre que passa pel centre és:

$$J = \frac{1}{2}MR^2 + \frac{1}{12}ML^2 \approx \frac{1}{2}MR^2 \quad [\text{kg} \cdot \text{m}^2] \quad (3.18)$$

L'aproximació és deguda a que els protectors dels rotors es consideren d'aquest tipus de cilindres, on la longitud d'aquests és pràcticament nul·la en comparació al radi.

El **teorema dels eixos paral·lels** relaciona el moment d'inèrcia respecte d'un eix que passa pel centre de masses d'un objecte amb el moment d'inèrcia respecte a un eix paral·lel a l'anterior a distància  $h$ :

$$J = J_{cm} + Mh^2 \quad [\text{kg} \cdot \text{m}^2] \quad (3.19)$$

El **moment angular** d'una partícula o d'un cos rígid es defineix com el producte vectorial del vector de posició i la quantitat de moviment de la partícula. La seva expressió és:

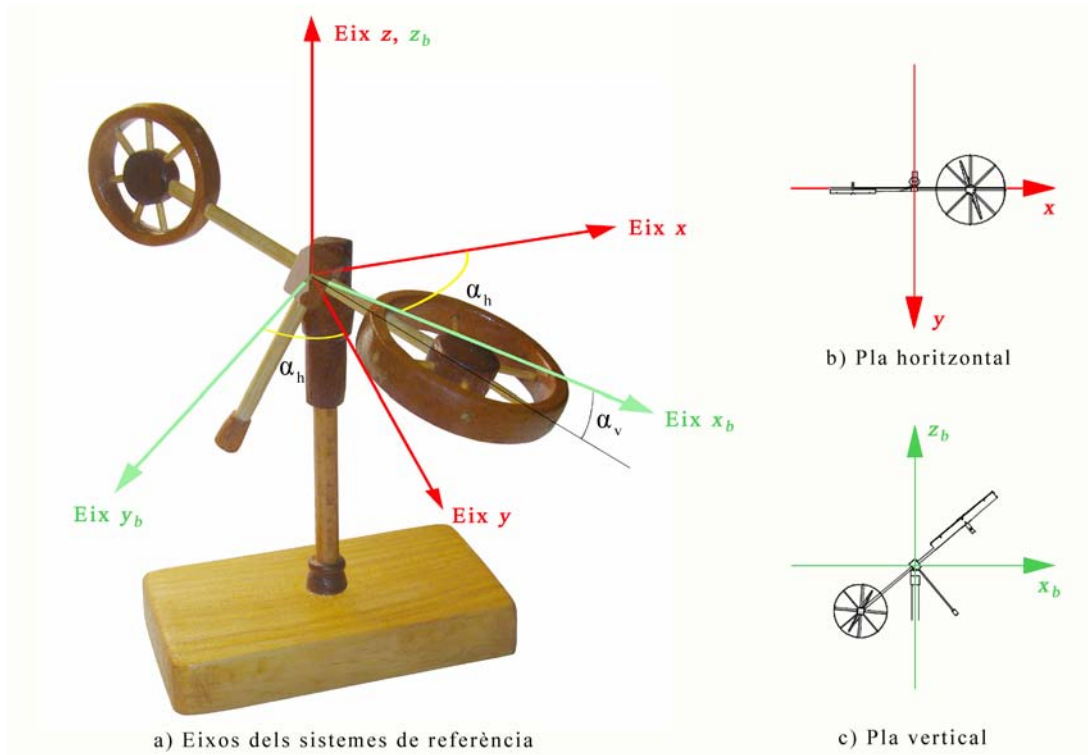
$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} \quad [\text{kg m}^2 \text{ s}^{-1}] \quad (3.20)$$

Sota certes condicions, tals com quan el moment extern total és zero, aquesta magnitud es conserva (llei de conservació del moment angular). A més, si l'objecte en qüestió compleix certes condicions de simetria respecte l'eix al voltant del qual gira, el moment angular és proporcional a la velocitat angular ( $\mathbf{L} = \mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\omega}$ ). Això no ocorre sempre i la forma física de l'objecte hi té molt a veure. En Beer *et al.* (2005) podeu trobar explicacions molt completes sobre el moment angular, tant de partícules individuals com de cossos rígids en dues i tres dimensions.

### 3.5.2. Sistemes de referència en el TRMS i forces fictícies

S'han emprat **dos sistemes de referència** en l'estudi de la dinàmica del TRMS: un sistema de referència inercial global i un altre de no-inercial solidari amb el TRMS. En mecànica newtoniana, un sistema de referència és no inercial (SRnI) quan en ell no es compleixen les lleis de moviment de Newton, com per exemple en un sistema accelerat o en rotació. En canvi, un sistema de referència és inercial (SRI) quan sí que s'hi compleixen les lleis de Newton i, per tant, la variació del moment lineal del sistema és igual a les

forces reals sobre el sistema. S'ha de tenir en compte que el TRMS es considera com un sistema aïllat, és a dir, que en el sistema de referència inercial no hi actuen forces externes sobre l'aparell.



**Figura 3.12** Sistemes de referència utilitzats, pla horitzontal i pla vertical

SR global fix (eixos  $x$ ,  $y$  i  $z$ ), en vermell; i SR solidari amb el TRMS (eixos  $x_b$ ,  $y_b$  i  $z_b$ ), en verd

La maqueta tallada en fusta és obra del meu pare, Antonio Hernández Moreno

El **sistema de referència global fix** ve descrit pels eixos  $x$ ,  $y$  i  $z$ , mentre que el **sistema solidari** pels eixos  $x_b$ ,  $y_b$  i  $z_b$  (Figura 3.12a). Ambdós sistemes tenen l'origen de coordenades en el pivot de l'aparell. Els eixos  $z$  i  $z_b$  són idèntics i apunten cap amunt al llarg de la torre. L'eix  $x$  apunta en la direcció del braç principal quan el TRMS es troba en la posició de treball, i l'eix  $y$  és perpendicular a  $x$  i a  $z$ . En canvi, els eixos del sistema de referència solidari amb el TRMS  $x_b$  i  $y_b$  segueixen als braços de l'aparell en el moviment dins del pla horitzontal (pla  $xy$ ) de tal forma que l'eix  $x_b$  és paral·lel a la projecció del braç principal sobre el pla horitzontal, i l'eix  $y_b$  és perpendicular a aquest últim dins del pla horitzontal. Dit d'una altra forma,  $x$ ,  $y$ ,  $x_b$  i  $y_b$  són coplanaris, i els dos últims es mouen respecte als dos primers dins d'aquest pla segons ho faci el TRMS.

El moviment global del TRMS queda sotmès bàsicament a la rotació al voltant de dos eixos. Per una banda, el moviment al voltant de l'eix vertical (eixos  $z$  i  $z_b$ ) que ocasiona la guinyada en el pla horitzontal (pla  $x_b y_b$  o pla  $xy$  en la Figura 3.12b). I per l'altra, el moviment al voltant de l'eix horitzontal (eix  $y_b$  o eix lateral) originant el moviment de capcineig i que centra l'anàlisi en el pla vertical (pla  $x_b z_b$  en la Figura 3.12c). Així mateix, els dos angles de posició queden descrits dins d'aquest marc de la següent manera:

l'angle de capcineig  $\alpha_v$  ve determinat per l'angle que hi ha entre  $x_b$  i el braç principal, mentre que l'angle de guinyada  $\alpha_h$  és l'angle que hi ha entre  $y$  i  $y_b$  (o el que és el mateix, entre  $x$  i  $x_b$ ).

En l'estudi del moviment dins del pla horitzontal s'utilitza el sistema de referència global fix —inercial—, mentre que en el pla vertical, és el sistema de referència solidari —no inercial— el que serveix de marc. És gràcies a aquesta peculiaritat del sistema solidari que convé introduir el concepte de *força fictícia* per a la bona comprensió d'aquest estudi.

Quan un observador des d'un sistema de referència no inercial, com l'és un sistema en rotació, tracta de comprendre el comportament del sistema com si fos un sistema inercial, és necessària la introducció de les anomenades **forces fictícies** per tal d'explicar el moviment del cos, segons es desprèn de l'equació (3.21); d'altra manera, les lleis de Newton no hi serien vàlides i hi ha efectes que no es podrien descriure. Segons Beer *et al.* (2005), l'acceleració absoluta  $\mathbf{a}$  d'una partícula en aquestes condicions de rotació es pot escriure de la forma següent:

$$\mathbf{a} = \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) + 2\boldsymbol{\Omega} \times (\dot{\mathbf{r}})_{\text{SRnI}} + (\ddot{\mathbf{r}})_{\text{SRnI}} \quad [\text{m/s}^2] \quad (3.21)$$

on  $\boldsymbol{\Omega} = \dot{\alpha}_v$  és la velocitat angular a la que rota el SRnI respecte al SRI i  $\mathbf{r}$  és el vector de posició de l'objecte (que és el mateix en els dos sistemes de referència, tot i que les seves components siguin diferents). En el primer sumand s'hi veu reflectida l'*acceleració d'Euler* o *tangencial*, mentre que en el segon, l'*acceleració centrífuga* o *normal*. El tercer sumand és l'*acceleració de Coriolis*, i el darrer és l'acceleració de la partícula dins del SRnI. Tanmateix, en l'estudi del pla vertical del TRMS, únicament es considera la força centrífuga per les raons que s'exposen a continuació.

La **força d'Euler**  $\mathbf{F}_E = m \cdot \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}$  és nul·la, ja que considerem per simplicitat que l'aparell rota al voltant de l'eix vertical de forma constant, amb la qual cosa  $\dot{\boldsymbol{\Omega}} = 0$ .

L'expressió de la **força de Coriolis** és  $\mathbf{F}_C = 2m \cdot \boldsymbol{\Omega} \times (\dot{\mathbf{r}})_{\text{SRnI}}$ . Cal recordar que si allò que estem estudiant és el moviment dintre del pla vertical, gràcies a la pròpia definició del sistema de referència, aquest sempre estarà contingut dins del pla  $x_b z_b$ . En altres paraules,  $(\dot{\mathbf{r}})_{\text{SRnI}}$  només té coordenades en  $x_b$  i en  $z_b$ , però no en  $y_b$ . Per altra banda,  $\boldsymbol{\Omega}$  té la mateixa direcció que l'eix  $z_b$ , per la convenció vigent en física. Segons la pròpia definició de producte vectorial, la força resultant té la mateixa direcció que l'eix  $y_b$ , fet que no afecta al moviment sota estudi, ja que com es veurà més endavant, només es consideren les forces contingudes en el pla  $x_b z_b$ . Per aquesta raó, s'ha obviat la força de Coriolis ja que, tot i ser-hi present, no té influència en el moviment del pla vertical. Allà on aquesta força tindria més influència és en els

moviments al voltant de qualsevol pla perpendicular a l'eix de rotació —com per exemple, en el pla  $x_b y_b$ . En el nostre cas, observeu que el pla vertical no compleix amb aquest requisit.

La **força centrífuga**  $\mathbf{F}_{cf} = m \cdot \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}$  té una importància cabdal en el moviment en el pla vertical ja que la seva direcció sempre està continguda en el pla  $x_b z_b$ . En l'apartat 3.7.1 tot això es desenvolupa amb més detall. Amb un simple cop de vista és fàcilment deduïble que la força centrífuga actua en qualsevol objecte, a diferència de la de Coriolis que ho fa únicament en els objectes que es mouen —és a dir, que tenen velocitat en el SRnI.

En el pla horitzontal, en canvi, al tractar-se d'una observació des d'un SRI global fix, no cal introduir cap força fictícia per a descriure el moviment, ja que totes elles són reals. Si desitgeu informació amb un rerefons teòric més detallat sobre els conceptes presentats en aquest apartat, dirigiu-vos a Beer *et al.* (2005) i a Gettys, Keller i Skove (1991). Es recomana també la visualització del vídeo de Udiprod (2007), en el qual es poden veure de forma molt clarivident la consideració d'ambdues forces fictícies, segons sigui el sistema de referència.

### 3.6. Dinàmica del TRMS

En els propers apartats es presenta un model analític de la dinàmica del TRMS, extret a partir de les lleis de Newton, que són principis bàsics de la física. El procés d'obtenció d'aquestes equacions, fonamentades en el model newtonià suggerit per Rahideh i Shaheed (2007), ha estat recolzat amb les bases teòriques de Beer *et al.* (2005) i de Tipler i Mosca (2005a), amb els treballs de Christensen *et al.* (2006), Nejari *et al.* (2011a, b), Balderud (2002), Gabriel (2008) i Ahmed (2009), i també amb un dels manuals d'ús d'una versió anterior del TRMS (Feedback Instruments 1998b).

A grans trets, la modelització de la dinàmica del TRMS passa pels següents passos: En primer lloc, es calculen els moments de força que actuen sobre l'aparell, així com els moments d'inèrcia relatius a cada eix de rotació, tant en el pla vertical i com en l'horitzontal. Tot seguit, en aplicació de la segona llei de Newton per a la rotació i de la conservació del moment angular, s'obtenen les equacions a l'espai d'estat que descriuen tot el sistema en cada pla.

### 3.7. Dinàmica en el pla vertical

Amb la introducció de les forces fictícies és possible fer un tractament d'un SRnI com si es tractés d'un SRI. En l'aplicació de la segona llei de Newton per a la rotació es relacionen el moment de força resultant

i l'acceleració angular. Si  $S_v$  és la velocitat angular [rad/s] en el pla vertical,  $J_v$  és el moment d'inèrcia total [kg·m<sup>2</sup>] respecte a l'eix horitzontal i  $\tau_v$  és el moment de força resultant [N] en el pla vertical, la segona llei de Newton diu que:

$$\tau_v^{\text{net}} = J_v \frac{dS_v}{dt} \quad [\text{N}\cdot\text{m}] \quad (3.22)$$

### 3.7.1. Moments de força en el pla vertical

Considerem que en el pla vertical hi actuen sis moments diferents sobre el TRMS.

- El moment  $\tau_m$  de la força propulsiva generada per l'impuls del rotor principal.
- El moment  $\tau_{fv}$  de la força de fregament.
- El moment  $\tau_g$  de la força gravitacional.
- El moment  $\tau_c$  de la força centrífuga deguda a la rotació en el pla horitzontal.
- El moment  $\tau_{gy}$  de l'efecte giroscòpic.
- El moment  $\tau_{ic}$  de la influència del rotor de cua.

A continuació es concreten amb més detall les expressions i els desenvolupaments d'aquests moments que actuen en el pla vertical. Abans però, convé ressaltar la convenció presa a l'hora de calcular els moments de força: el moment és negatiu si apunta cap endins del paper (per a  $y_b \leq 0$ ), i és positiu si apunta cap enfora del paper (per a  $y_b \geq 0$ ), cap al lector.

#### *Moment de la força propulsiva*

El **moment de la força propulsiva**  $F_v$  representa l'aportació aerodinàmica de les pales del rotor i manifesta la magnitud de força que s'atribueix a cada velocitat angular ( $\omega_v$ ) al girar les pales del rotor principal. La força propulsiva del rotor principal és, com ja s'ha vist en el capítol anterior sota el nom de sustentació, perpendicular al pla del rotor, la qual cosa significa que en el pla vertical és una força tangencial respecte a l'eix horitzontal. Llavors, el moment de força resultant és:

$$\tau_m = l_m F_v(\omega_v) \quad [\text{N}\cdot\text{m}] \quad (3.23)$$

on  $F_v(\omega_v)$  ha estat aproximada experimentalment per Rahideh i Shaheed (2007) de la forma:

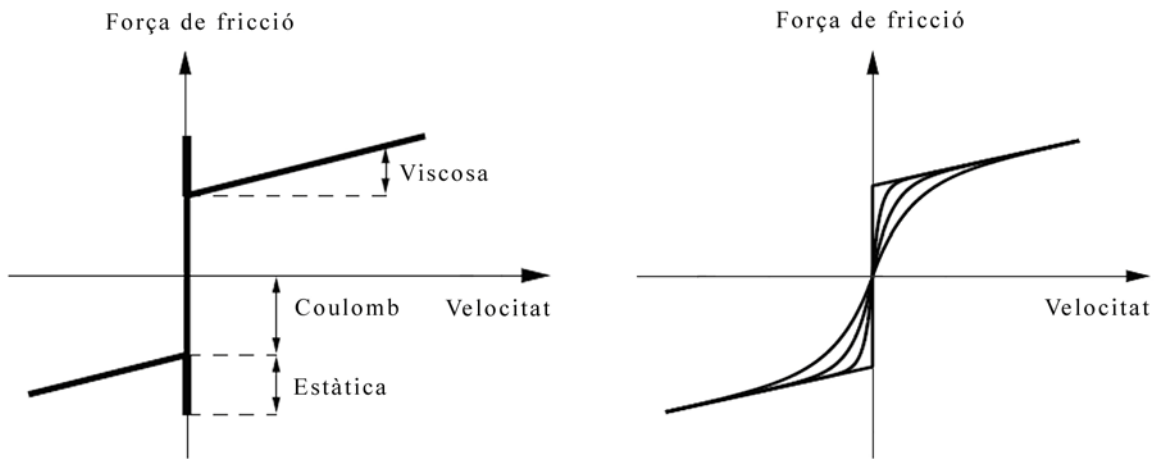
$$F_v(\omega_v) = \begin{cases} k_{fvp} \cdot |\omega_v| \cdot \omega_v & \text{si } \omega_v \geq 0 \\ k_{fvp} \cdot |\omega_v| \cdot \omega_v & \text{si } \omega_v < 0 \end{cases} \quad [\text{N}] \quad (3.24)$$

### Moment de la força de fregament

Desestimant el senzill model de Rahideh i Shaheed (2008a) per a la fricció, Balderud (2002) proposa un model bastant complert del **moment de la força de fregament**. Aquest model considera la fricció mecànica (amb la contribució viscosa i la de Coulomb) i un amortiment aerodinàmic (de les pales del rotor girant):

$$\tau_{fv} = (\beta_v |\omega_v| + b_v) \dot{\alpha}_v + T_c \text{sign}(\dot{\alpha}_v) \left(1 - e^{-|\dot{\alpha}_v|/Cr}\right) \quad [\text{N}\cdot\text{m}] \quad (3.25)$$

on  $\beta_v$  és el coeficient d'amortiment aerodinàmic,  $\omega_v$  és la velocitat angular del rotor principal,  $b_v$  és el coeficient de fregament viscos,  $\dot{\alpha}_v = d\alpha_v/dt = \Omega_v$  és la velocitat de l'angle de capcineig ( $\alpha_v$ ),  $T_c$  és el coeficient de fregament de Coulomb i  $Cr$  és la constant de suavitat, per aconseguir que la funció sigui *suau* als voltants de l'origen. Observeu en la Figura 3.13 com és el model de fricció ideal, tenint en compte els fregaments viscos, estàtic i de Coulomb, i de quina manera s'aproxima en els experiments duts a terme. La part exponencial en l'equació (3.25) s'introdueix per tal de facilitar la integració de la funció signe als voltants de l'origen, on hi existeix una discontinuïtat.



**Figura 3.13:** Model de fregament (sense contemplar l'amortiment aerodinàmic):

a) Ideal; b) Aproximat (per a diferents factors de suavitat)

La inclusió d'un amortiment aerodinàmic es justifica de la següent manera. Gràcies a la viscositat de l'aire, inclús a velocitats força petites, les mateixes pales poden ser interpretades com si fossin un disc homogeni, on la seva àrea depèn de la velocitat del rotor. En altres paraules, el fet que el propulsor giri suposa un amuntegament d'aire, que implica un increment de la massa del cos i conseqüentment de la



seva inèrcia. En resum, a més velocitat de les pales, més massa d'aire i, per tant, més amortiment. Tanmateix, com que la derivació d'aquest model aerodinàmic a partir dels principis bàsics de la física és pràcticament impossible, Balderud (2002) opta per utilitzar un polinomi de primer ordre per tal de capturar les propietats més importants de l'amortiment aerodinàmic que, en cap cas, assegura un precisió important en tot el marge d'operació. Aleshores, aquest model aerodinàmic depèn de la velocitat de gir de les pales i de la velocitat de capcineig, tal com s'aprecia en l'equació (3.25). Per a més informació sobre la justificació del model de fricció aquí presentat, vegeu Balderud (2002).

#### *Moment de la força gravitacional*

El **moment de la força gravitacional** actua només en el pla vertical i té la següent expressió:

$$\tau_g = g[(A - B)\cos\alpha_v - C\sin\alpha_v] \quad [\text{N}\cdot\text{m}] \quad (3.26)$$

Les constants  $A$ ,  $B$  i  $C$  denoten la dependència d'aquest moment amb l'estructura física del TRMS, és a dir, amb les longituds i les masses. Efectivament, segons si l'estructura del TRMS és una o una altra (per exemple, el braç del rotor principal és més llarg o més curt, o bé si el contrapès es troba a la punta de la barra o no, etc.), tot això afecta a la posició de repòs. Els valors teòrics d'aquestes constants són:

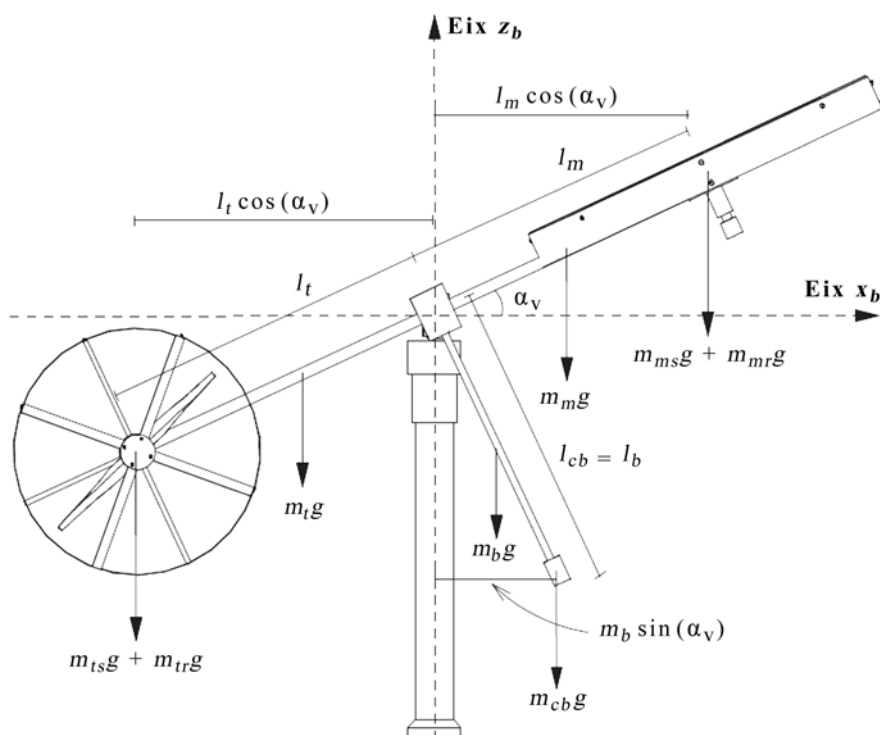
$$A = \left( \frac{m_t}{2} + m_{tr} + m_{ts} \right) l_t = 0,1042 \text{ kg}\cdot\text{m};$$

$$B = \left( \frac{m_m}{2} + m_{mr} + m_{ms} \right) l_m = 0,1170 \text{ kg}\cdot\text{m};$$

$$C = \left( \frac{m_b}{2} l_b + m_{cb} l_{cb} \right) = 0,0201 \text{ kg}\cdot\text{m}.$$

El valor de l'acceleració gravitacional considerada per als experiments ha estat facilitat per l'Institut Nacional de Metrologia d'Alemanya (Physikalisch-Technische Bundesanstalt 2007). Per al llocs on s'han dut a terme els experiments, la constant té aproximadament els següents valors:  $g \approx 9,8030 \text{ m/s}^2$  al Campus Nord (UPC, Barcelona) i  $g \approx 9,8022 \text{ m/s}^2$  a Cornudella de Montsant (Priorat).

Per a la seva demostració, considereu, en primer lloc, el conjunt de forces detallat en la Figura 3.14 amb la finalitat d'identificar el moment de força gravitacional resultant en el pla vertical. Per això, s'ha dividit el TRMS en tres parts: la part de cua, la part principal i la part del contrapès. A més, cadascuna de les forces actuant s'ha descompost en la component tangencial i la component radial segons l'eix al voltant del qual rota el TRMS (eix  $y_b$ ).



Considerem que les forces actuen en el centre de masses de cadascuna de les parts

$$\tau_{g,t} = +g \left( \frac{m_t}{2} + m_{tr} + m_{ts} \right) l_t \cos \alpha_v \quad [\text{N} \cdot \text{m}] \quad (3.27)$$
$$\tau_{g,m} = -g \left( \frac{m_m}{2} + m_{mr} + m_{ms} \right) l_m \cos \alpha_v \quad [\text{N} \cdot \text{m}] \quad (3.28)$$

46

$$\tau_{g,c} = -g \left( \frac{m_b}{2} l_b + m_{cb} l_{cb} \right) \sin \alpha_v \quad [\text{N} \cdot \text{m}] \quad (3.29)$$

Combinant les equacions (3.27), (3.28) i (3.29) s'obté el moment total exercit per la força gravitacional en el TRMS:

$$\tau_g = g[(A - B) \cos \alpha_v - C \sin \alpha_v] \quad [\text{N} \cdot \text{m}] \quad (3.30)$$

on

$$A = \left( \frac{m_t}{2} + m_{tr} + m_{ts} \right) l_t; \quad B = \left( \frac{m_m}{2} + m_{mr} + m_{ms} \right) l_m; \quad C = \left( \frac{m_b}{2} l_b + m_{cb} l_{cb} \right)$$

Cal considerar alguns comentaris. Els càlculs s'han desenvolupat en el cas concret de la situació de la Figura 3.14, en la qual el rotor principal està per sobre de l'eix  $x_b$ . En el supòsit que el rotor principal estigués per sota de l'eix  $x_b$ , el valor del moment de força resultant no canviaria de signe i tindria la mateixa magnitud. La regla de mà dreta pot ajudar a visualitzar aquestes consideracions.

Pel que fa a les forces de la part principal, en ambdós casos el moment de força resultant té signe negatiu ja que és perpendicular al paper cap endins, mentre que el moment de la part de cua, també en ambdós casos té un signe positiu perquè és perpendicular al paper cap enfora, cap al lector.

Pel que fa al moment de la part del contrapès, en ambdós casos també és negatiu: en el primer perquè el moment resultant és perpendicular al paper cap endins; i en el segon, tot i que el moment resultant és perpendicular al paper cap enfora (i.e. de signe positiu), l'angle negatiu entre el contrapès i la vertical ( $-\alpha_v$ ) fa que el seu sinus canviï de signe ( $-\sin \alpha_v$ ), canviant automàticament el sentit del moment resultant, ara ja negatiu.

De les expressions anteriors —equacions (3.27), (3.28) i (3.29)— se'n poden extreure altres conclusions. Tal com s'aprecia en la Figura 3.14, s'ha considerat que el pes de cada barra actua en el seu centre de masses, és a dir, en el mig d'aquesta. En certa manera és com si concentréssim tota la massa de la barra en aquell punt —aquesta assumpció s'anomena *paràmetres concentrats*. De l'estructura obtinguda d'aquestes equacions es pot concloure que s'ha obtingut el mateix resultat que si haguéssim concentrat, per una banda, la massa de mitja barra a l'origen, i la massa de l'altra mitja allà on es troba el motor o el contrapès (d'aquí l'aparició dels termes  $m_t/2$ ,  $m_m/2$  i  $m_b/2$ ).

### *Moment de la força centrífuga*

El **moment de la força centrífuga** s'origina pel moviment del TRMS en el pla horitzontal (és a dir, al voltant de l'eix vertical  $z$ ). La força centrífuga és una força fictícia que permet explicar el moviment d'un

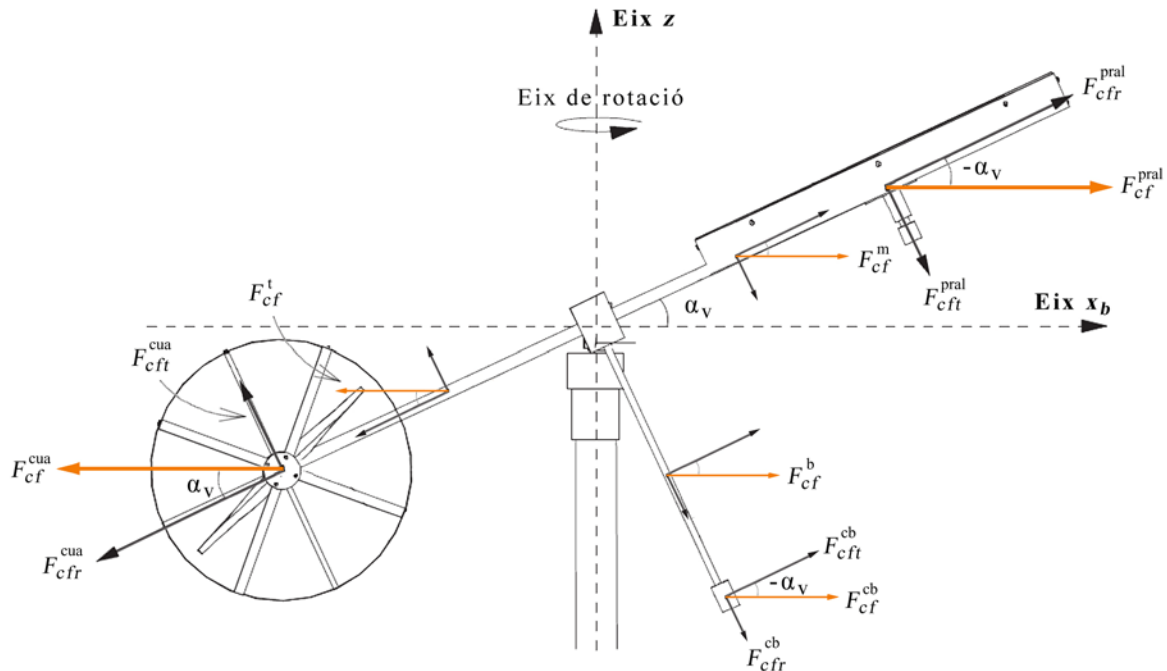
cos quan aquest és observat des d'un SRnI i representa la tendència d'un cos a allunyar-se de l'eix de rotació i a abandonar la seva trajectòria corba. La seva expressió és, segons Beer *et al.* (2005):

$$\mathbf{F}_{cf} = m \cdot \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} \quad [\text{N}] \quad (3.31)$$

on  $m$  és la massa de l'objecte,  $\boldsymbol{\Omega}$  és la velocitat angular del SRnI en rotació i  $\mathbf{r}$  és el vector de posició de l'objecte des de l'eix de rotació. La força centrífuga té la mateixa direcció i mòdul que la força centrípeta, que és la força real que manté un objecte en la seva trajectòria corba, però ambdues són de sentit contrari. Aleshores, les direccions de les força centrífugues es poden constatar en la Figura 3.15 i el seu mòdul és:

$$F_{cf} = m \frac{v^2}{r} = m \omega^2 r \quad [\text{N}] \quad (3.32)$$

Tanmateix, convé recordar que ara l'eix de rotació pel qual s'origina aquesta força no és l'eix horitzontal (eix  $y_b$ ), sinó l'eix vertical (eix  $z$ ), la qual cosa implica que cal tindre en compte que la distància de cada part a l'eix vertical és la projecció de la longitud de cada braç sobre l'eix  $x_b$ .



**Figura 3.15** Les forces centrífugues actuant en el TRMS

Per a l'anàlisi d'aquestes forces, es torna a centrar l'estudi en tres parts diferenciades: la part del rotor principal, la part del rotor de cua i la part del contrapès. Novament, per convenció, cada barra concentra la seva massa en el seu punt mig. Les forces centrífugues relatives a cada part (perpendiculars a l'eix de gir cap enfora) tenen una magnitud de:

$$F_{pral} = (m_{mr} + m_{ms}) \Omega_h^2 l_m \cos \alpha_v + m_m \Omega_h^2 \frac{l_m}{2} \cos \alpha_v \quad [\text{N}] \quad (3.33)$$

$$F_{cua} = (m_{tr} + m_{ts}) \Omega_h^2 l_t \cos \alpha_v + m_t \Omega_h^2 \frac{l_t}{2} \cos \alpha_v \quad [\text{N}] \quad (3.34)$$

$$F_{cpes} = m_b \Omega_h^2 \frac{l_b}{2} \sin \alpha_v + m_{cb} \Omega_h^2 l_{cb} \sin \alpha_v \quad [\text{N}] \quad (3.35)$$

Aleshores, a partir de l'equació (3.14) es calcula el moment de força resultant. Ara però, cal tenir en compte que l'eix de rotació és l'eix  $y_b$ . A més, aplicant la regla de la mà dreta, s'han d'afegir el signes corresponents a cada sentit segons dicti la convenció. Els moments relatius a cada part, ja amb el signe corresponent, queden:

$$\tau_{pral} = r F_t^{pral} = - \left( l_m (m_{mr} + m_{ms}) \Omega_h^2 l_m \cos \alpha_v \sin \alpha_v + \frac{l_m}{2} m_m \Omega_h^2 \frac{l_m}{2} \cos \alpha_v \sin \alpha_v \right) \quad [\text{N} \cdot \text{m}] \quad (3.36)$$

$$\tau_{cua} = r F_t^{cua} = - \left( l_t (m_{tr} + m_{ts}) \Omega_h^2 l_t \cos \alpha_v \sin \alpha_v + \frac{l_t}{2} m_t \Omega_h^2 \frac{l_t}{2} \cos \alpha_v \sin \alpha_v \right) \quad [\text{N} \cdot \text{m}] \quad (3.37)$$

$$\tau_{cpes} = r F_t^{cpes} = + \left( \frac{l_b}{2} m_b \Omega_h^2 \frac{l_b}{2} \sin \alpha_v \cos \alpha_v + l_{cb} m_{cb} \Omega_h^2 l_{cb} \sin \alpha_v \cos \alpha_v \right) \quad [\text{N} \cdot \text{m}] \quad (3.38)$$

El moment total resultant de la força centrífuga és, traient factors comuns i reordenant:

$$\tau_c = \left[ - (m_{mr} + m_{ms}) l_m^2 - m_m \left( \frac{l_m}{2} \right)^2 - (m_{tr} + m_{ts}) l_t^2 - m_t \left( \frac{l_t}{2} \right)^2 + m_b \left( \frac{l_b}{2} \right)^2 + m_{cb} l_{cb}^2 \right] \Omega_h^2 \cos \alpha_v \sin \alpha_v$$

$$\tau_c = - \frac{1}{2} H \Omega_h^2 \sin 2\alpha_v \quad [\text{N} \cdot \text{m}] \quad (3.39)$$

on  $\Omega_h = d\alpha_h/dt = \dot{\alpha}_h$  és la velocitat de l'aparell en el pla horitzontal i

$$H = (m_{mr} + m_{ms}) l_m^2 - m_m \left( \frac{l_m}{2} \right)^2 - (m_{tr} + m_{ts}) l_t^2 - m_t \left( \frac{l_t}{2} \right)^2 + m_b \left( \frac{l_b}{2} \right)^2 + m_{cb} l_{cb}^2$$

Altres aproximacions han estat realitzades per a trobar el valor del paràmetre  $H$ . Convé ressaltar que en aquest desenvolupament hem considerat que cada barra del TRMS concentra tota la seva massa en el seu punt mig. Ara bé, s'ha de tenir en compte que en d'altres treballs, com ara Feedback Instruments (1998b), Rahideh i Shaheed (2007, 2008a) o Christensen *et al.* (2006), apliquen la simplificació de concentrar la

massa d'una meitat de la barra en l'origen i l'altra meitat, allà on hi ha el motor o contrapès. D'aquí les variacions en l'expressió de la constant  $H$ .

#### *Moment de l'efecte giroscòpic*

El **moment de l'efecte giroscòpic** esdevé quan les pales del rotor principal giren a gran velocitat i, per causa del gir horitzontal del TRMS, canvia el pla de rotació del motor i es crea un moment de força que empeny l'aparell cap al moviment anomenat *precessió* (Beer *et al.* 2005). Aleshores, per analogia es considera que les pales del rotor actuen com un giroscopi que es troba en la situació de *precessió estable* —situació en la qual romanen constants l'angle de nutació, la velocitat de precessió i la velocitat de gir. Per al nostre cas, aquests tres paràmetres corresponen a: angle de nutació  $\theta = -\alpha_v$ , velocitat de precessió  $\dot{\phi} = \dot{\alpha}_h = \Omega$  i velocitat de gir del disc  $\dot{\psi} = \omega_v$ . En altres paraules, aquest moment modelitza la influència del moviment constant al voltant de l'eix vertical sobre el TRMS amb un angle de capcineig constant.

Segons Beer *et al.* (2005), en aquesta situació el moment giroscòpic correspon a l'expressió:

$$\tau_{gy} = \Omega_{gy} \times \mathbf{H}_O \quad [\text{N}\cdot\text{m}] \quad (3.40)$$

on  $\Omega_{gy}$  és la velocitat angular resultant del giroscopi i  $\mathbf{H}_O$  és el moment angular del disc respecte al seu centre de masses. Les equacions generals que descriuen el moviment d'un giroscopi, aplicades al TRMS, són:

$$\Omega_{gy} = +\Omega \sin \alpha_v \mathbf{j} + \Omega \cos \alpha_v \mathbf{k} \quad [\text{rad/s}] \quad (3.41)$$

$$\mathbf{H}_O = J_y \Omega \sin \alpha_v \mathbf{j} + J_z (\Omega \cos \alpha_v + \omega_v) \mathbf{k} \quad [] \quad (3.42)$$

on  $J_y$  i  $J_z$  són, respectivament, els moments d'inèrcia del giroscopi respecte als eixos  $y$  i  $z$ . Substituint (3.41) i (3.42) en (3.40), s'obté un moment giroscòpic de:

$$\tau_{gy} = [J_z \omega_v + \Omega \sin \alpha_v (J_z - J_y)] \Omega \sin \alpha_v \mathbf{j} \quad [\text{N}\cdot\text{m}] \quad (3.43)$$

Si, a més, es considera que la velocitat de les pales del rotor principal és molt més gran que la velocitat de guinyada ( $\omega_v \gg \Omega$ ), llavors es pot aproximar el moment de l'efecte giroscòpic de la següent manera:

$$\tau_{gy} = J_z \omega_v \cdot \Omega \sin \alpha_v \mathbf{j} \quad [\text{N}\cdot\text{m}] \quad (3.44)$$

Noteu com  $\tau_{gy}$  afecta al moviment del pla vertical ja que té la mateixa direcció que l'eix  $y_b$ , com la resta de moments de força vists. Canviant el nom del moment d'inèrcia i només considerant-ne la magnitud, l'aproximació del moment giroscòpic queda per al present projecte:

$$\tau_{gy} = k_g \omega_v \cdot \Omega \cdot \sin \alpha_v \quad [\text{N}\cdot\text{m}] \quad (3.45)$$

Autors com Rahideh i Shaheed (2007, 2008a), Balderud (2002), Ahmed (2009) o bé el manual de Feedback Instruments (2006a) el modelitzen de diverses maneres, però en general, en tots aquests treballs el moment resultant depèn de la velocitat de guinyada ( $\Omega_h = \dot{\alpha}_h$ ), de la velocitat angular del motor principal ( $\omega_v$ ) i també de l'angle de capcineig ( $\alpha_v$ ). En els articles d'helicòpters de quatre rotors, com són McKerrow (2004), Guenard, Hamel i Moreau (2005), Derafa, Madani i Benallegue (2006), Derafa *et al.* (2010), Erginer i Altug (2007) i Amir i Abbass (2008) també modelitzen aquest moment de forma similar.

Tanmateix, els experiments en el laboratori contrasten notablement amb el rerefons teòric exposat més amunt, i l'equació (3.45) sofreix una breu modificació. Diferents assajos i proves conclouen, com també ho fa Balderud (2002), que la influència giroscòpica és millor implementar-la de la següent manera:

$$\tau_{gy} = k_g \omega_v \cdot \Omega \cdot \cos \alpha_v \quad [\text{N}\cdot\text{m}] \quad (3.46)$$

#### *Moment de la influència del motor de cua*

A diferència de Rahideh i Shaheed (2007, 2008a), Nejari *et al.* (2011a, b), Christensen *et al.* (2006) i el manual antic de Feedback Instruments (1998b), que modelitzen aquesta influència com a una velocitat angular a partir de la conservació del moment angular, en aquest projecte s'opta per considerar la influència del motor de cua sobre el moviment vertical com un moment de força més. Els treballs al laboratori justifiquen aquesta elecció, ja que les realitzacions dels citats autors construeixen un model un tant complicat i especial. Tanmateix, al nostre entendre, la implementació aquí presentada encara disposa d'un marge de millora.

Seguint la idea utilitzada per Gabriel (2008) i per Feedback Instruments (2006a), es modelitza la influència del rotor de cua de forma proporcional a la velocitat de les seves pales.

$$\tau_{ic} = J_{rt} \cdot \omega_h \quad [\text{N}\cdot\text{m}] \quad (3.47)$$

Aquesta modelització és molt senzilla i, amb tota seguretat, obviarà comportaments dinàmics no lineals que ocorren en el TRMS. Tanmateix, com en veurà més endavant, aquesta influència no és gaire important en termes de magnitud i, per això, és innecessari ser extremadament precís en el càlcul d'aquest

moment. Ara bé, una possible millora passaria per considerar també l'angle de capcineig en el càlcul del moment  $\tau_{ic}$ .

#### *Moment de força resultant en el pla vertical*

En definitiva, els moments considerats en les equacions (3.23), (3.25), (3.26), (3.39), (3.46) i (3.47), produeixen un **moment de força resultant en el pla vertical** de:

$$\tau_v = \tau_m - \tau_{fv} + \tau_g - \tau_c - \tau_{gy} + \tau_{ic} \quad [\text{N}\cdot\text{m}] \quad (3.48)$$

### 3.7.2. Moments d'inèrcia en el pla vertical

Per a determinar el **moment d'inèrcia respecte a l'eix horitzontal** (eix  $y_b$ ) cal dividir el TRMS en diverses parts i calcular el moment d'inèrcia de cadascuna d'elles per separat. Tanmateix, els càlculs dels moments es simplifiquen notablement quan s'assumeix una geometria simple d'aquestes parts. Per exemple, els braços poden considerar-se com una barra uniforme, els protectors dels rotors com a cilindres buits de longitud pràcticament nul·la, les pales dels rotors girant com un paral·lelepípede i els motors com a partícules puntuals.

El TRMS en el pla vertical s'ha dividit en vuit parts. A continuació, en la taula següent hi són llistats els moments d'inèrcia de cadascuna d'aquestes parts respecte a l'eix horitzontal (eix  $y_b$ ), així com el número d'equació a partir de la qual s'ha deduït.

Equació	Part	Paràmetre
(3.15)	Rotor pral. + motor	$J_{v1} = m_{mr}l_m^2$
(3.16)	Braç principal	$J_{v2} = \frac{1}{3}m_m l_m^2$
(3.15)	Contrapès	$J_{v3} = m_{cb}l_{cb}^2$
(3.16)	Braç del contrapès	$J_{v4} = \frac{1}{3}m_b l_b^2$
(3.15)	Rotor de cua + motor	$J_{v5} = m_{tr}l_t^2$
(3.16)	Braç de cua	$J_{v6} = \frac{1}{3}m_t l_t^2$
(3.18) i (3.19)	Protector rotor pral.	$J_{v7} = \frac{1}{2}m_{ms}r_{ms}^2 + m_{ms}l_m^2$
(3.17) i (3.19)	Protector rotor cua	$J_{v8} = m_{ts}r_{ts}^2 + m_{ts}l_t^2$

**Taula 3.3** Moments d'inèrcia del TRMS respecte a l'eix horitzontal

El moment d'inèrcia respecte a l'eix horitzontal no depèn de la seva posició en l'espai, ja que les distàncies a l'eix de rotació són invariants sigui quina sigui la posició de l'aparell. Aleshores, aquest moment té un valor constant de:



$$J_v = \sum_{i=1}^8 J_{vi} = 0,06726 \quad [\text{kg} \cdot \text{m}^2] \quad (3.49)$$

### 3.7.3. Comportament dinàmic en el pla vertical

Llavors, la combinació de les equacions (3.22) i (3.48) duu fins a l'equació del moviment del TRMS en el pla vertical:

$$\begin{aligned} \frac{dS_v}{dt} = & \frac{l_m F_v(\omega_v) - (\beta_v |\omega_v| + b_v) \dot{\alpha}_v - T_c \text{sign}(\dot{\alpha}_v) \left(1 - e^{-(|\dot{\alpha}_v|/Cr)}\right)}{J_v} \\ & + \frac{g[(A-B) \cos \alpha_v - C \sin \alpha_v] - 0,5 \cdot \dot{\alpha}_h^2 H \sin 2\alpha_v - k_g \omega_v \cdot \dot{\alpha}_h \cdot \cos \alpha_v + J_{rt} \cdot \omega_h}{J_v} \quad [\text{rad/s}^2] \quad (3.50) \end{aligned}$$

## 3.8. Dinàmica en el pla horitzontal

Atès que el moviment en el pla horitzontal s'estudia en el marc d'un sistema de referència inercial, pot aplicar-se la segona llei de Newton per a la rotació, obtenint:

$$\tau_h^{\text{net}} = J_h \frac{dS_h}{dt} \quad [\text{N} \cdot \text{m}] \quad (3.51)$$

on  $S_h$  és la velocitat angular [rad/s] en el pla horitzontal,  $J_h$  és el moment d'inèrcia total [kg·m<sup>2</sup>] respecte a l'eix vertical i  $\tau_h$  és el moment de força resultant [N·m] en el pla vertical.

### 3.8.1. Moments de força en el pla horitzontal

En el pla horitzontal actuen quatre moments sobre el TRMS.

- El moment  $\tau_t$  de la força propulsiva generada per l'impuls del rotor de cua.
- El moment  $\tau_{\text{cable}}$  generat per la presència de cables al voltant del pivot que alimenten els motors i que capturen els senyals dels codificadors.
- El moment  $\tau_{fh}$  de la força de fregament.
- El moment  $\tau_{ip}$  de la influència del rotor principal.

De forma anàloga al pla vertical, el **moment de la força propulsiva** comparteix la mateixa estructura que el seu homòleg. Així doncs,

$$\tau_t = l_t F_h(\omega_h) \cos \alpha_v \quad [\text{N} \cdot \text{m}] \quad (3.52)$$

on  $F_h(\omega_h)$  ha estat aproximada experimentalment per Rahideh i Shaheed (2007) de la forma:

$$F_h(\omega_h) = \begin{cases} k_{fhp} \cdot |\omega_h| \cdot \omega_h & \text{si } \omega_h \geq 0 \\ k_{fhm} \cdot |\omega_h| \cdot \omega_h & \text{si } \omega_h < 0 \end{cases} \quad [\text{N}] \quad (3.53)$$

Constatau la dependència del moment  $\tau_t$  amb l'angle de capcineig ( $\alpha_v$ ). A diferència del cas vertical on l'eix de rotació era l'eix  $y_b$ , ara la distància amb l'eix de rotació (aquí  $z$  o  $z_b$ ) no és la longitud del braç sinó la projecció d'aquest sobre l'eix  $x_b$ .

El **moment dels cables** s'origina gràcies a la presència de cables plans i rígids que connecten l'ordinador i el TRMS. A mesura que el TRMS rota, aquests cables influeixen notablement en el seu moviment. Tot i que aquest moment té un fort component no lineal, Rahideh i Shaheed (2008a) l'aproximen linealment amb la posició de guinyada. El TRMS mai té la mateixa posició de repòs de guinyada i això implica una dificultat afegida. Ara bé, fruit de l'experimentació en el laboratori, s'han introduït alguns canvis en aquesta aproximació per tal de fer més realista el comportament horitzontal del TRMS:

$$\tau_{\text{cable}} = \begin{cases} b_{cp} \cdot \alpha_h - b_{0p} & \text{si } \alpha_h \geq t_c \\ b_{cn} \cdot \alpha_h - b_{0n} & \text{si } \alpha_h < t_c \end{cases} \quad [\text{N} \cdot \text{m}] \quad (3.54)$$

on els paràmetres  $b_{cp}$  i  $b_{cn}$  [ $\text{N} \cdot \text{m}/\text{rad}$ ],  $b_{0p}$  i  $b_{0n}$  [ $\text{N} \cdot \text{m}$ ] i  $t_c$  [ $\text{rad}$ ] són ajustats mitjançant el procés d'identificació experimental. En la Figura 3.16 es pot apreciar una representació genèrica de  $\tau_{\text{cable}}$ .

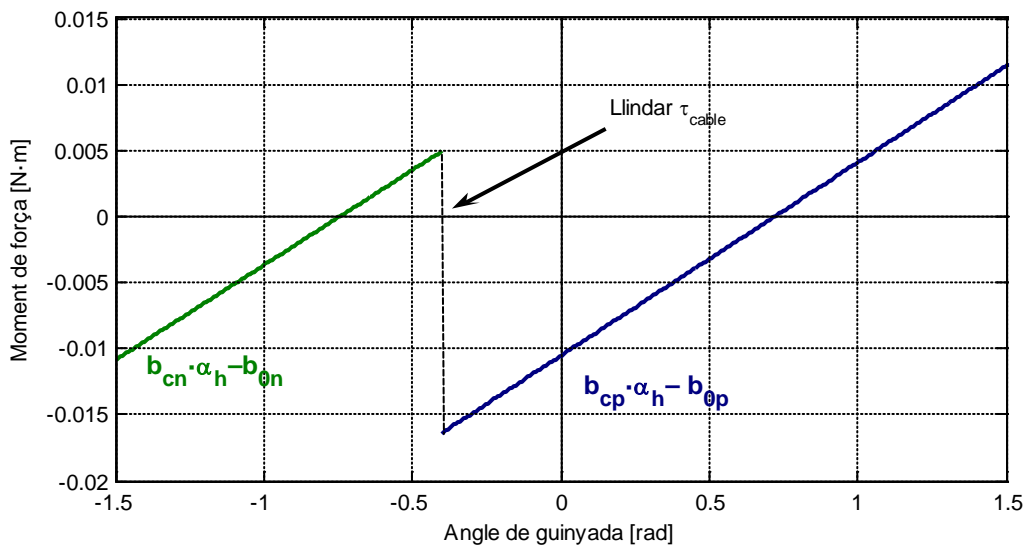


Figura 3.16 Aproximació lineal del moment de força del cable

Segons s'aprecia en els experiments de laboratori (vegeu la Figura 4.34), la posició de repòs de guinyada és bastant variable —en comparació especialment amb la de l'angle de capcineig. En el pla vertical actua una força arxiconeguda i estudiada com és la de la gravetat, que és constant en direcció i sentit, i prou important en termes de magnitud com per situar pràcticament sempre l'aparell en la mateixa posició de capcineig. En canvi, en el moviment horitzontal aquesta força no hi actua, i la posició de guinyada en repòs —i en règim permanent— és influenciada notablement pels cables del TRMS. Aquests cables plans i bastant rígids estan ubicats de tal manera que provoquen un important comportament no lineal i aleatori en el moviment horitzontal del TRMS de difícil modelització.

La modificació del model de Rahideh i Shahhed (2008a) està basada en els experiments de la Figura 4.34. En ella es poden veure les dues regions on el moment del cable no hi és efectiu (posicions en RP). Aquesta és la raó fonamental per la qual s'han introduït les constants  $b_{op}$  i  $b_{on}$  en el model de Rahideh i Shaheed (2008a). Un bon exemple d'això també és quan, al deixar anar el TRMS amb els motors apagats en  $\alpha_h \approx 0$ , l'aparell es decanta cap a un angle de guinyada positiu, fet que també es reflecteix en la Figura 3.16 gràcies a la situació negativa del lllindar  $t_c$ .

Xu i Li (2010) proposen un interessant model per la influència dels cables en el moviment dels sistemes que en tenen. En aquest model inclou dues parts, l'elàstica i l'amortiment, i les relaciona amb les equacions de Lagrange.

El **moment de la força de fregament** en el pla horitzontal es veu reduït a la seva versió més simple. Ara, a diferència del cas vertical, només es considera el fregament viscos, i s'eludeixen les parts estàtica, de Coulomb i aerodinàmica. El model de fricció està molt relacionat amb el règim transitori d'un sistema, ja que depèn d'una velocitat. A causa de la influència no lineal del moment del cable i del seu senzill model considerat, el model del moviment horitzontal és força imprecís i rudimentari. És per això que no té sentit utilitzar un model molt sofisticat per a la fricció ja que el règim transitori és pràcticament impossible d'ajustar-lo si no es disposa d'un model de cable suficientment acurat. Els experiments en el laboratori així ho avalen. Aleshores, el moment de la força de fregament actuant quan es gira al voltant de l'eix vertical és:

$$\tau_{fh} = b_h \dot{\alpha}_h \quad [\text{N}\cdot\text{m}] \quad (3.55)$$

on  $b_h$  és el coeficient de fregament viscos i  $\dot{\alpha}_h = d\alpha_h/dt$  és la velocitat de l'angle de guinyada.

Per al **moment de la influència del motor principal** es pren la mateixa estructura que en el del cas vertical, però ara considerant només la component paral·lela a l'eix de rotació (eix  $z$ ). Aleshores,

$$\tau_{ip} = J_{rm} \cdot \omega_v \cdot \cos \alpha_v \quad [\text{N} \cdot \text{m}] \quad (3.56)$$

En definitiva, els moments considerats en les equacions (3.52), (3.54), (3.55) i (3.56) produeixen un **moment de força net resultant en el pla horitzontal** de la forma:

$$\tau_h = \tau_t - \tau_{\text{cable}} - \tau_{fh} + \tau_{ip} \quad [\text{N} \cdot \text{m}] \quad (3.57)$$

### 3.8.2. Moments d'inèrcia en el pla horitzontal

El TRMS en el pla horitzontal també s'ha dividit en vuit parts per calcular el **moment d'inèrcia respecte a l'eix vertical** (eixos  $z$  i  $z_b$ ). A continuació, en la taula següent són llistats els moments d'inèrcia de cadascuna d'aquestes parts respecte a l'eix vertical, així com el número d'equació a partir de la qual s'ha deduït. Cal ressaltar que ara la distància de cada part a l'eix vertical (eix  $z$ ) és la projecció de la longitud de cada braç sobre l'eix  $x_b$ .

Equació	Part	Paràmetre
(3.15)	Rotor pral. + motor	$J_{h1} = m_{mr} (l_m \cos \alpha_v)^2$
(3.16)	Braç principal	$J_{h2} = \frac{1}{3} m_m (l_m \cos \alpha_v)^2$
(3.15)	Contrapès	$J_{h3} = m_{cb} (l_{cb} \cos \alpha_v)^2$
(3.16)	Braç del contrapès	$J_{h4} = \frac{1}{3} m_b (l_b \cos \alpha_v)^2$
(3.15)	Rotor de cua + motor	$J_{h5} = m_{tr} (l_t \cos \alpha_v)^2$
(3.16)	Braç de cua	$J_{h6} = \frac{1}{3} m_t (l_t \cos \alpha_v)^2$
(3.17) i (3.19)	Protector rotor pral.	$J_{h7} = m_{ms} r_{ms}^2 + m_{ms} (l_m \cos \alpha_v)^2$
(3.18) i (3.19)	Protector rotor cua	$J_{h8} = \frac{1}{2} m_{ts} r_{ts}^2 + m_{ts} (l_t \cos \alpha_v)^2$

**Taula 3.4** Moments d'inèrcia del TRMS respecte a l'eix vertical

El moment d'inèrcia total correspon a la suma dels moments d'inèrcia de totes les parts, i depèn de la posició de capcineig, ja que les distàncies de cada part del TRMS a l'eix de rotació varien d'acord amb la posició vertical. Aleshores, aquest moment té un valor de:

$$J_h = \sum_{i=1}^8 J_{hi} = D \cos^2 \alpha_v + E \sin^2 \alpha_v + F \quad [\text{kg} \cdot \text{m}^2] \quad (3.58)$$

on

$$D = \left( \frac{m_m}{3} + m_{mr} + m_{ms} \right) l_m^2 + \left( \frac{m_t}{3} + m_{tr} + m_{ts} \right) l_t^2 = 0,0580$$

$$E = \frac{m_b}{3} l_b^2 + m_{cb} l_{cb}^2 = 0,0049$$

$$F = m_{ms} r_{ms}^2 + \frac{m_{ts}}{2} r_{ts}^2 = 0,0062$$

### 3.8.3. Comportament dinàmic en el pla horitzontal

De la combinació de les equacions (3.51) i (3.57) s'obté l'equació del moviment del TRMS en el pla horitzontal:

$$\frac{dS_h}{dt} = \frac{l_t F_h(\omega_h) \cos \alpha_v - b_h \dot{\alpha}_h - \tau_{cable} + J_{rm} \omega_v \cos \alpha_v}{D \cos^2 \alpha_v + E \sin^2 \alpha_v + F} \quad [\text{rad/s}^2] \quad (3.59)$$

## 3.9. Model complet: integració dels submodels

### 3.9.1. Equacions en l'espai d'estat

Un cop descrites analíticament cadascuna de les parts que componen el TRMS, tot seguit es presenten les equacions que regeixen el comportament del model global. Tanmateix, aquí no s'han tingut en compte ni l'etapa preliminar ni els tacòmetres, centrant exclusivament l'atenció en el moviment del prototip en si. A partir de les equacions (3.9), (3.13), (3.50) i (3.59), les equacions de l'espai d'estat del TRMS són:

$$\frac{di_{av}}{dt} = -\frac{R_{av}}{L_{av}} i_{av} - \frac{k_{av}}{L_{av}} \omega_v + \frac{V_v}{L_{av}} \quad (3.60)$$

$$\frac{d\omega_v}{dt} = \frac{k_{av}}{J_{mr}} i_{av} - \frac{B_{mr}}{J_{mr}} \omega_v - \frac{f_1(\omega_v)}{J_{mr}} \quad (3.61)$$

$$\begin{aligned} \frac{dS_v}{dt} = & \frac{l_m f_2(\omega_v) - (\beta_v |\omega_v| + b_v) \dot{\alpha}_v - T_c \text{sign}(\dot{\alpha}_v) \left(1 - e^{-(|\dot{\alpha}_v|/Cr)}\right)}{J_v} \\ & + \frac{g[(A-B) \cos \alpha_v - C \sin \alpha_v] - 0,5 \cdot \dot{\alpha}_h^2 H \sin 2\alpha_v - k_g \omega_v \cdot \dot{\alpha}_h \cdot \cos \alpha_v + J_{rt} \omega_h}{J_v} \end{aligned} \quad (3.62)$$

$$\frac{d\alpha_v}{dt} = S_v \quad (3.63)$$

$$\frac{di_{ah}}{dt} = -\frac{R_{ah}}{L_{ah}} i_{ah} - \frac{k_{ah}}{L_{ah}} \omega_h + \frac{V_h}{L_{ah}} \quad (3.64)$$

$$\frac{d\omega_h}{dt} = \frac{k_{ah}}{J_{tr}} i_{ah} - \frac{B_{tr}}{J_{tr}} \omega_h - \frac{f_3(\omega_v)}{J_{tr}} \quad (3.65)$$

$$\frac{dS_h}{dt} = \frac{l_t f_4(\omega_h) \cos \alpha_v - b_h \dot{\alpha}_h - f_5(\alpha_h) + J_{rm} \omega_v \cos \alpha_v}{D \cos^2 \alpha_v + E \sin^2 \alpha_v + F} \quad (3.66)$$

$$\frac{d\alpha_h}{dt} = S_h \quad (3.67)$$

on

$$f_1(\omega_v) = k_{Lv} \cdot \text{sign}(\omega_v) \cdot \omega_v^2$$

$$f_2(\omega_v) = \begin{cases} k_{fvp} \cdot |\omega_v| \cdot \omega_v & \text{si } \omega_v \geq 0 \\ k_{fvn} \cdot |\omega_v| \cdot \omega_v & \text{si } \omega_v < 0 \end{cases}$$

$$f_3(\omega_h) = k_{Lh} \cdot \text{sign}(\omega_h) \cdot \omega_h^2$$

$$f_4(\omega_h) = \begin{cases} k_{fhp} \cdot |\omega_h| \cdot \omega_h & \text{si } \omega_h \geq 0 \\ k_{fhn} \cdot |\omega_h| \cdot \omega_h & \text{si } \omega_h < 0 \end{cases}$$

$$f_5(\alpha_h) = \begin{cases} b_{cn} \cdot \alpha_h - b_{0n} & \text{si } \alpha_h < t_c \\ b_{cp} \cdot \alpha_h - b_{0p} & \text{si } \alpha_h \geq t_c \end{cases}$$

$$\dot{\alpha}_v = d\alpha_v/dt$$

$$\dot{\alpha}_h = d\alpha_h/dt$$

$$A = \left( \frac{m_t}{2} + m_{tr} + m_{ts} \right) l_t$$

$$B = \left( \frac{m_m}{2} + m_{mr} + m_{ms} \right) l_m$$

$$C = \left( \frac{m_b}{2} l_b + m_{cb} l_{cb} \right)$$

$$D = \left( \frac{m_m}{3} + m_{mr} + m_{ms} \right) l_m^2 + \left( \frac{m_t}{3} + m_{tr} + m_{ts} \right) l_t^2$$

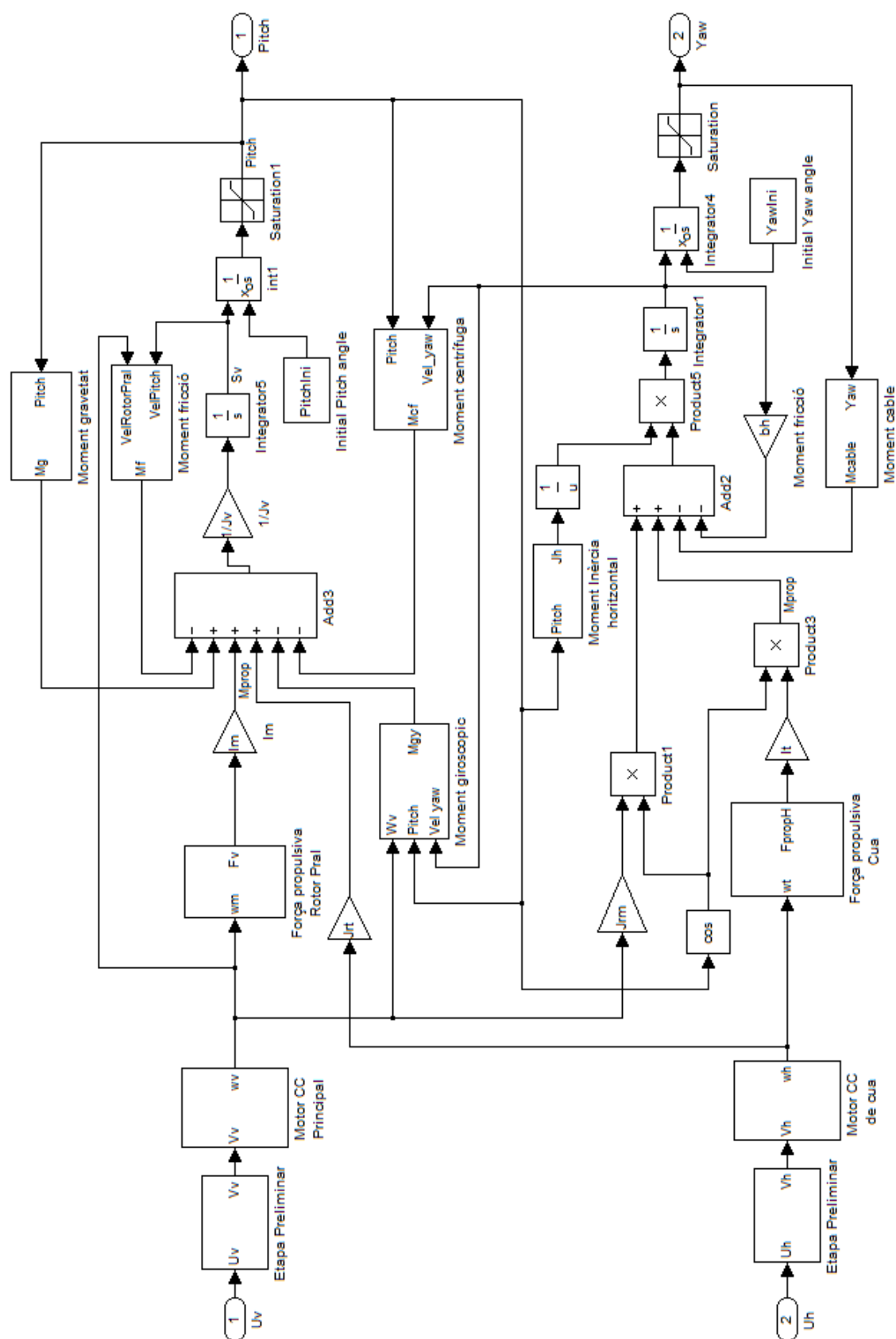
$$E = \frac{m_b}{3} l_b^2 + m_{cb} l_{cb}^2$$

$$F = m_{ms} r_{ms}^2 + \frac{m_{ts}}{2} r_{ts}^2$$

$$H = (m_{mr} + m_{ms}) l_m^2 - m_m \left( \frac{l_m}{2} \right)^2 - (m_{tr} + m_{ts}) l_t^2 - m_t \left( \frac{l_t}{2} \right)^2 + m_b \left( \frac{l_b}{2} \right)^2 + m_{cb} l_{cb}^2$$

### 3.9.2. Diagrama de blocs SIMULINK

Per acabar, les equacions (3.60) a (3.67) juntament amb la model del circuit d'interfície, permeten construir el diagrama de blocs SIMULINK del sistema global que es mostra en la Figura 3.17. En ell, es poden apreciar les diferents etapes de què consta el TRMS, així com les influències creuades entre els plans dels rotors. Noteu també que algunes parts, com ara els motors CC o bé alguns moments de força, s'*amaguen* sota una caixa negra a fi de facilitar la comprensió del diagrama de blocs global.



**Figura 3.17** Diagrama de blocs SIMULINK del model global



## Capítol 4. Identificació experimental i ajust de paràmetres

En aquest capítol s'aborda la identificació experimental del TRMS. Es presenten, en primer lloc, els punts clau en la identificació experimental de paràmetres i, tot seguit, es fa una panoràmica d'eines i mètodes, tot justificant les eleccions fetes per a aquest projecte. A continuació, es dissenyen els diferents experiments per dur a terme la identificació i l'ajust dels paràmetres elegits. Per acabar, es presenten les gràfiques experimentals i simulades i, mitjançant diversos criteris, es valida el model.

### 4.1. El procés de la identificació experimental de sistemes

Un cop obtinguda l'estructura del model a partir dels principis bàsics de la física, s'han d'ajustar els valors d'alguns paràmetres i, d'aquesta manera, construir definitivament el model que descriu adequadament la dinàmica del TRMS.

El procediment seguit en la identificació de paràmetres (Ljung 1999, 2010a) es detalla a continuació. Un cop obtingudes les equacions que regeixen el sistema i que condicionen l'estructura del model, es dissenyen cadascun dels experiments tenint en compte les condicions de contorn i les simplificacions en cada cas. En aquest punt, una elecció adequada del temps de mostreig, dels senyals que exciten el sistema i dels paràmetres a estimar són algunes de les qüestions més importants.

Després, sota les mateixes condicions que s'han previst en el disseny de cada experiment, es capturen les dades en el sistema real. En aquest pas s'hi inclou també el preprocessament de les dades obtingudes a fi de disposar-les en la forma més adient per a l'aplicació dels algorismes d'identificació. A continuació s'aplica el mètode d'identificació pròpiament dit a cada experiment, que inclou la tria del criteri d'optimització, l'elecció del mètode numèric per resoldre'l, i els càlculs pròpiament dits.

Finalment, es sotmet el model obtingut als criteris de validació per tal de discernir si es tracta o no d'un *bon* model que descriu el TRMS. Val a dir que el procés d'identificació és una metodologia iterativa, que té la seva pròpia dinàmica i que en cap cas és exacta. En el cas que les proves de validació no siguin superades, aleshores cal tornar enrere i revisar cadascun dels passos per tal de fer més acuradament les diverses tries. En la Figura 4.1 queda reflectit el circuit global de la identificació de sistemes.

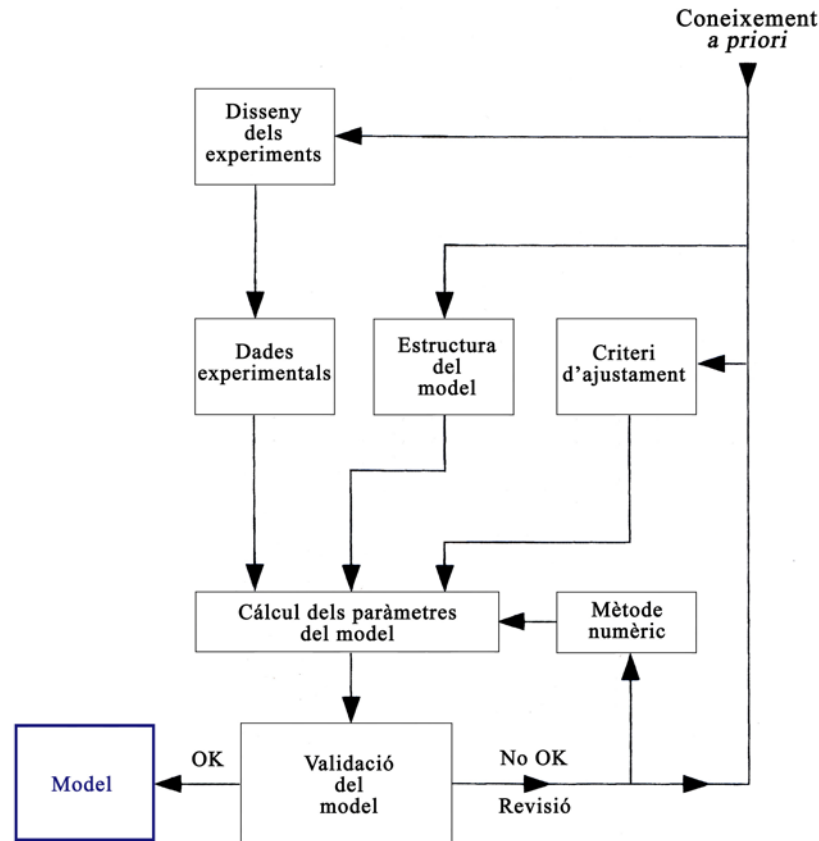


Figura 4.1 El procés d'identificació experimental segons Ljung (1999)

## 4.2. Eleccions comunes a tots els experiments

### 4.2.1. Estructura del model

L'estructura del model del TRMS escollida és del tipus *grey box*. En aquest tipus de models, les relacions entre variables i les restriccions a les que estan sotmeses són conegudes gràcies als principis bàsics de la física, però els valors d'alguns dels paràmetres són desconeguts (Ljung 2010a; Nelles 2001). Aquells paràmetres que no puguin ser mesurats han de ser ajustats mitjançant el procés d'identificació a partir de dades experimentals.

Mentre que el model proposat pels fabricants del TRMS (Feedback Instruments 1998b, 2006a) també és un *grey box*, els exercicis proposats en el manual actual (Feedback Instruments 2006a) és un model *black box*. Aquests darrers pràcticament no tenen en compte el coneixement *a priori* del sistema i estan basats únicament en dades experimentals: tant la seva estructura interna com els seus paràmetres vénen determinats a partir de la modelització experimental i les possibles estructures són d'allò més heterogènies, com ara *AutoRegressive Moving Average with eXogenous input* (ARMAX), *AutoRegressive with eXogenous input* (ARX), *Output-Error* (OE), *Box-Jenkins* (BJ), entre d'altres.

Per a més informació sobre les diferents estructures de models, llegiu els articles de visió general de Ljung (1994, 2008, 2010b), així com els monogràfics d'identificació lineal de Ljung (1999) i d'identificació no lineal de Nelles (2001).

#### 4.2.2. Disseny dels senyals d'entrada

Els senyals d'entrada determinen el punt d'operació del sistema, així com quines parts i modes són excitats durant l'experiment (Ljung 1999). Cal, doncs, que aquesta entrada sigui *rica*, és a dir, que exciti el sistema i el forci a mostrar les seves propietats, inclús aquelles que puguin ser *a priori* desconegudes. Una elecció incorrecta d'aquests senyals pot, per exemple, ocultar les no-linealitats del sistema i fer que el model construït sigui molt poc realista.

A l'hora de dissenyar aquests senyals s'han de considerar aspectes d'allò més pragmàtics per tal d'excitar el sistema de la millor manera. Per exemple, a la pràctica, treballar en una banda de freqüències interessants és quelcom molt adequat per a identificar el sistema en qüestió; per això, un senyal amb un espectre més o menys pla en aquesta banda ofereix resultats prou satisfactoris. A més, també cal considerar el *factor de cresta*<sup>\*</sup> del senyal que, com més petit sigui, millor (Ljung 1999).

En el cas de sistemes no lineals com el TRMS, un senyal d'excitació ha de tenir dues característiques importants (Ahmad *et al.* 2002). Per una banda, ha de ser capaç d'excitar tots els modes dinàmics d'interès; en altres paraules, que el contingut espectral d'aquest senyal ha de ser ric en freqüències dins del ample de banda d'interès del sistema —el que anomenem senyals *persistentment excitants*. Per altra banda, el senyal d'entrada també ha de ser ric en amplitud i brindar diferents nivells al llarg de tot el marge d'operació.

Al llarg del procés d'identificació del TRMS s'han considerat diversos tipus de senyals d'entrada com ara el graó, el sinus, el *pseudo-random binary signal* (PRBS), l'*amplitude-modulated PRBS* (APRBS), el *chirp* i el multisinus. Alguns d'ells compleixen els anteriors requisits, mentre que d'altres no. Tanmateix, tot i que cadascun ofereix uns avantatges i uns inconvenients, cada experiment ha estat identificat amb el senyal que més informació ha permès capturar durant el procés, tal com es desprèn en els propers apartats.

---

<sup>\*</sup> El factor de cresta d'un senyal el determina la ràtio entre el valor màxim del senyal i el seu valor eficaç en la banda de freqüències d'interès (Pintelon i Schoukens 2001). Aquest factor dóna una idea de la compacitat del senyal. Senyals amb un comportament impulsiu —i per tant, amb un factor de cresta gran— injecten molta menys potència al sistema que senyals que tenen el mateix valor màxim però amb un factor de cresta petit. Aleshores, un bon senyal és aquell que té un factor de cresta petit. El límit inferior teòric s'aconsegueix en senyals binaris i simètrics. El problema d'aquests és que no permeten una correcta validació enfront de les no-linealitats. Podeu veure dues definicions diferents d'aquest factor en Ljung (1999) i en Pintelon i Schoukens (2001).

Per a una visió més general del disseny dels senyals d'entrada llegiu Godfred (1993), Ljung (1999), Pintelon i Schoukens (2001) i Söderström i Stoica (1989). El disseny del PRBS és tractat especialment en detall per Davies (1970), Nelles (2001), Dutton, Thompson i Baraclough (1997), Landau i Zito (2006) i Eykhoff (1974).

#### 4.2.3. Mètode i criteri d'optimització

Un cop seleccionada l'estructura del model i efectuada l'obtenció de dades, la recerca del *millor* model dins d'aquest conjunt esdevé un problema d'estimació de paràmetres. Cal, en primer lloc, buscar un test mitjançant el qual pugui ser avaluada l'habilitat d'aquests models per descriure les dades observades. Es defineix l'*error de predicció* com

$$e(t) = y(t) - \hat{y}(t) \quad (4.1)$$

on  $y(t)$  és la sortida del sistema real i  $\hat{y}(t)$  és la sortida del model quan ambdós han estat excitats amb la mateixa entrada. Cal tenir en compte que en aquest camp es treballa amb mostres i la variable discreta  $t$  fa referència al número de mostra temporal. L'error de predicció també pot anomenar-se *residuals*, ja que representa la part de les dades que el model no pot reproduir.

Un *bon* model és aquell que prediu bé, és a dir, que produeix errors de predicció petits quan és excitat sota les mateixes condicions que el sistema. Però, quant *petit* ha de ser aquest error? Segons Ljung (1999) fonamentalment hi ha dues maneres d'enfocar-ho, ambdues en el domini temporal. La primera és minimitzant la norma escalar del vector d'error (o alguna altra funció que mesuri la mida d' $e(t)$ ), i l'altra és exigint que l'error  $e(t)$  sigui incorrelat amb la seqüència de dades.

El *mètode dels mínims quadrats* (LS, *Least Squares* en anglès), un cas particular dels *mètodes d'error-predicció* (PEM, *Prediction-Error Methods*), ha estat l'escollit per aquest problema gràcies als seus avantatges i la seva popularitat (Ljung 1999; Knudsen 2004). Aquest mètode minimitza l'error de predicció, i el resultat de la identificació en la seva variant quadràtica són els paràmetres  $\hat{\theta}$  amb què el quadrat de l'error de predicció és mínim:

$$\hat{\theta} = \arg \min \left( \frac{1}{2N} \sum_{t=1}^N e(t)^2 \right) \quad (4.2)$$

El mètode LS té l'avantatge que és aplicable a totes les estructures de model, lineals i no lineals, *grey* i *black box*, en llaç obert i tancat, en domini temporal i freqüencial, etc. El codi de minimització és essencialment el mateix, i només el càlcul del predictor i del seu gradient és específic de l'estructura de model i del mètode numèric utilitzat. No obstant això, un dels desavantatges és la possibilitat de quedar

atrapats en falses solucions que corresponen a mínims locals, per la qual cosa és molt important fer una bona tria dels valors inicials dels paràmetres a estimar.

Convé ressaltar que la identificació que es realitza aquí és del tipus *no recursiu*. En conseqüència, les dades capturades durant tot un interval de temps són tractades com un sol bloc per a l'estimació dels paràmetres, que és posterior a la captura, al contrari del què ocorre en els mètodes *recursius*. En aquests darrers, el càlcul dels paràmetres es realitza de forma *adaptativa* a les observacions fins al temps present durant cada interval de mostreig i generalment són executats en temps real a la captura de dades.

A la pràctica també és força habitual la situació en què, en un mateix experiment, sigui per les limitacions de la planta o per la voluntat de combinar diverses sortides a diferents entrades, s'han de realitzar un nombre separat de captures de dades que han d'estar sotmeses a un mateix criteri. Convé ressaltar que no és possible encadenar totes aquestes dades unes darrere de les altres ja que els punts de connexió causarien transitoris que podrien malmetre l'estimació, segons apunta Ljung (1999). La solució a aquesta problemàtica consisteix en formar directament un nou criteri d'optimització com a suma de criteris d'identificació de cada segment, i realitzar l'optimització globalment (Ljung 1999; Nejari *et al.* 2011b). Així doncs, els paràmetres òptims són determinats per la minimització del nou criteri:

$$\hat{\theta} = \arg \min \left( \frac{1}{2KN} \sum_{k=1}^K \sum_{t=1}^N \left( y_k(t) - \hat{y}_k(t | \hat{\theta}_k) \right)^2 \right) \quad (4.3)$$

on el subíndex  $k$  indica el conjunt al qual pertanyen les dades i  $K$  és el nombre total de conjunts. També s'ha de tenir en compte que cada criteri parcial pot optimitzar uns paràmetres diferents ( $\hat{\theta}_k$ ), així com també minimitzar l'error de les respostes d'entrades diferents.

Per a més informació sobre altres variants del mètode LS i altres mètodes PEM, tant recursius com no, adreceu-vos a Ljung (1999, 2008, 2010b), Nelles (2001), Landau i Zito (2006) i Eykhoff (1974). Sobre els mètodes de correlació, dels quals l'*Instrumental Variable (I-V) method* n'és el màxim exponent, vegeu Ljung (1999), Nelles (2001), Landau i Zito (2006) i Dutton, Thompson i Baraclough (1997). I finalment, per a tècniques i metodologies centrades en el domini freqüencial, remeteu-vos a Ljung (1999) i a Pintelon i Schoukens (2001).

#### 4.2.4. Eines de programari per a l'optimització. Mètodes numèrics

Quan es realitza l'estimació de paràmetres a partir de dades experimentals és important mantenir separats dos aspectes. D'una banda, s'ha de caracteritzar l'estimació cercada, ja sigui com a solució de certa equació o com a criteri a minimitzar de certa funció, que en el cas que ens ocupa és el quadrat de l'error

de predicció. D'altra banda, cal emprar un mètode numèric, algorisme o iteració que calculi aquesta estimació.

A l'hora de dur a terme tots aquests càlculs, en aquest projecte s'han temptejat fins a quatre eines de programari diferents per bé que cadascuna d'elles presenta les seves pròpies limitacions. En primer lloc, SENSTOOLS, un conjunt d'eines per a MATLAB dissenyat per Knudsen (2004). En segon, el *System Identification Toolbox* 7.4.1 (per a MATLAB 7.11) de Ljung (2010a), que presenta instruments molt potents per a treballar en la identificació de sistemes tant lineals com no lineals. En tercer lloc, l'*Optimization Toolbox* 3.0.3 (per a MATLAB 7.1) mitjançant la funció `lsqnonlin`, especialment indicada per a la resolució de problemes no lineals de mínims quadrats. I en darrer lloc, el *Simulink Design Optimization* 1.2 (per a Matlab 7.11), que inclou la interfície gràfica d'usuari (GUI, *Graphical User Interface* en l'anglès) *Control and Estimation Tools Manager* (CETM). Aquesta és l'eina principal de treball en aquest projecte gràcies a la seva simplicitat, la seva amabilitat i el ventall de prestacions que ofereix, i a més., també es combina amb l'ús de l'altre programari de MATLAB.

El *Control and Estimation Tools Manager* (Figura 4.2) és una GUI en l'entorn de SIMULINK que combina diferents conjunts d'eines del MATLAB per tal d'estimar els paràmetres dels models. Entre les seves bondats destaquen la possibilitat d'elegir diferents mètodes d'optimització local i global —a través de l'*Optimization Toolbox* i del *Global Optimization Toolbox*, respectivament— i diversos instruments per al preprocessament de les captures; també permet fer un seguiment gràfic en temps real dels valors dels paràmetres en cada iteració i de l'ajustament entre les sortides del model i de la planta (The MathWorks 2011b).

Quant als mètodes numèrics que disposa el CETM, en destaquen els següents: el *Simplex search* —mètode local de cerca directa—, els mètodes locals basats en el gradient —*Active-Set*, *Interior-Point* i *Trust-Region-Reflective*—, els també locals però enfocats a mínims quadrats no lineals —*Trust-Region-Reflective* i *Levenberg-Marquardt*— i, finalment, el *Pattern search*, un mètode d'optimització global.\* Tot seguit es presenta una breu ressenya de tots aquells mètodes que s'han utilitzat al llarg del present projecte. Per a més informació sobre la resta, remeteu-vos al manual d'ús del CETM (The MathWorks 2011b).

El CETM resol els problemes no lineals d'optimització de mínims quadrats mitjançant la funció `lsqnonlin` de l'*Optimization Toolbox* 5.1 (per a MATLAB 7.11). Aquesta funció permet utilitzar els

---

\* El mètode *Simplex search* utilitza la funció `fminsearch` de l'*Optimization Toolbox* de MATLAB; els mètodes basats en el gradient, la funció `fmincon` de l'*Optimization Toolbox*; els enfocats a mínims quadrats, la funció `lsqnonlin` de l'*Optimization Toolbox*; i *Pattern search*, la funció `patternsearch` del *Global Optimization Toolbox* de MATLAB (The MathWorks 2011b).

algorismes iteratius *Trust-Region-Reflective* (TRR) i *Levenberg-Marquardt* (LM) —segons The MathWorks (2010)—, tot i que en versions més antigues també es podia usar el *mètode de Gauss-Newton*\* (GN) —segons The Mathworks (2005a). Aquests tres mètodes numèrics són tècniques no lineals d'optimització local i són altament recomanables quan el criteri a optimitzar és una estructura tan particular com la suma de quadrats, tot i que l'equació (4.3) pot ser resolta també per qualsevol altre mètode general d'optimització sense restriccions (Nelles 2001; Nocedal i Wright 2006).

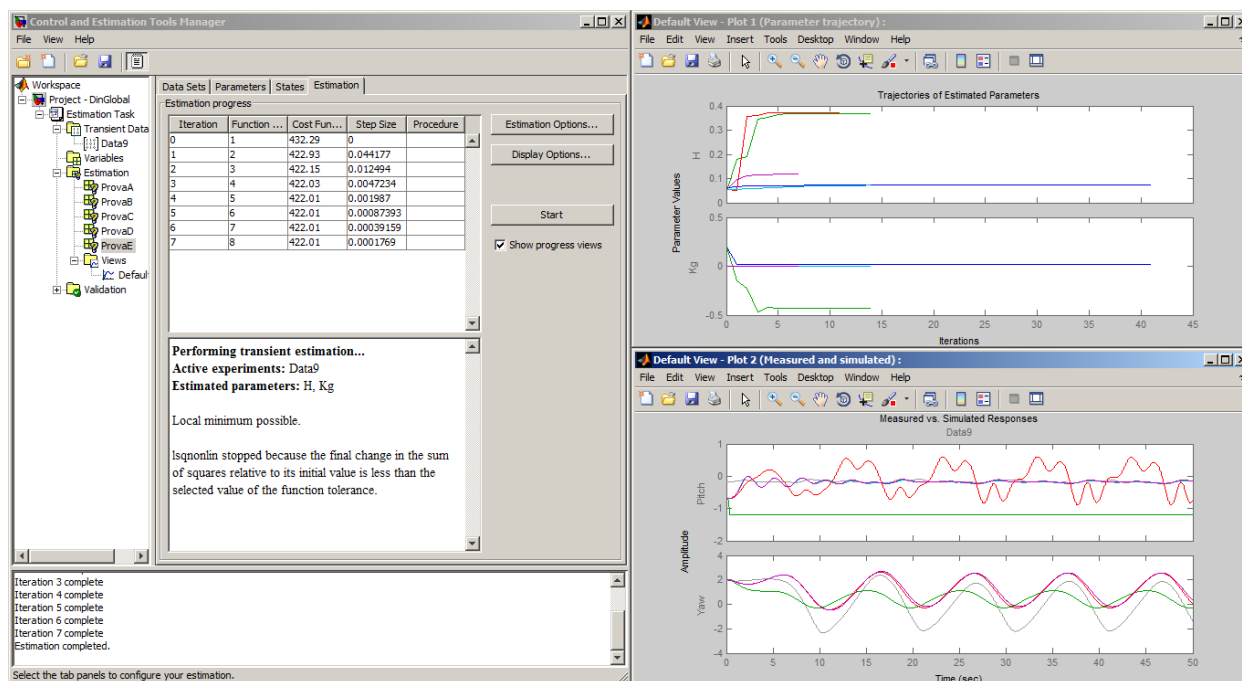


Figura 4.2 Control and Estimation Tools Manager (MATLAB 7.11)

Els mètodes que treuen partit dels mínims quadrats es basen típicament en la premissa que els termes derivatius de primer ordre dominen als de segon. En particular, el gradient i la matriu hessiana tenen una estructura especial en aquests algorismes; la hessiana, per exemple, consisteix en una singular combinació d'informació derivativa de primer i de segon ordre. En aquests algorismes aquesta informació de segon ordre és negligida i, aleshores, aquesta aproximació té l'avantatge de que la matriu hessiana s'obté només amb l'avaluació de les derivades de primer ordre, fet que implica un baix cost computacional i de temps. Tanmateix, l'anterior supòsit no està justificat quan els residuals de la solució són bastant grans —cas en què seria millor utilitzar un mètode general d'optimització sense restriccions (Gill, Murray i Wright 1981; Nelles 2001; Nocedal i Wright 2006).

El **mètode de Gauss-Newton** és un mètode local iteratiu basat en el gradient ja que pot considerar-se com una modificació del *mètode de Newton*. Divergeix d'aquest darrer en el fet que l'algorisme GN eludeix la

\* Val a dir que, en realitat, es tracta del *mètode de Gauss-Newton amortit* (GNA), ja que en moltes referències es fa un abús del llenguatge.

informació de segon ordre en l'aproximació de la matriu hessiana (Dennis i Schnabel 1996), quedant només en funció de la informació derivativa de primer ordre. Això implica per al mètode GN una convergència quadràtica quan els residuals són pràcticament nuls, similar a la del mètode de Newton; una convergència lineal ràpida en problemes bastant lineals amb residuals bastant petits; una convergència lineal lenta en problemes escassament no lineals o amb residuals bastant grans; i cap convergència en problemes amb fortes no-linearitats o amb grans residuals. La velocitat de convergència decreix a mesura que les no-linearitats i la grandària dels residuals creixen; si algun d'aquests és molt gran, llavors en cap cas convergeixen. A més, també permet resoldre problemes lineals de mínims quadrats en una sola iteració. D'altra banda, no és un mètode ben definit quan la matriu jacobiana no té rang complet (Dennis i Schnabel 1996). Quan aquest mètode treballa bé, acostuma a ser sorprenentment eficient; tanmateix, és bastant inestable i malencerta sovint, segons Gill i Murray (1976). Existeixen múltiples modificacions del mètode per tal de conservar els seus resultats satisfactoris i mitigar les seves insuficiències (Gill, Murray i Wright 1981; The MathWorks 2005a).

Segons Dennis i Schnabel (1996), existeixen principalment dues modificacions de l'algorisme Gauss-Newton a fi de millorar-lo. La primera és utilitzant l'estratègia *line-search*<sup>\*</sup> i conflueix en el **mètode de Gauss-Newton amortit**<sup>†</sup> (GNA). Aquest, a diferència del primer en el qual no es pot triar la longitud del pas, permet fer els passos de longitud adequada en el sentit sempre descendent, la qual cosa implica una convergència local en pràcticament tots els problemes no lineals de mínims quadrats —incloent-hi els de grans residuals i els fortament no lineals. Alhora comparteix les principals propietats del mètode general de GN, com ara la no-necessitat de segones derivades. Tanmateix, hereta els mateixos ràtios de convergència lenta allà on també el seu predecessor té problemes, com passa quan el rang de la matriu jacobiana no és complet. Sens dubte, aquest mètode és bastant ràpid però, com apunta Nelles (2001), el mètode de Newton tindrà millor rendiment en la majoria de problemes ja que utilitza la informació exacta

---

<sup>\*</sup> En els mètodes iteratius que estem tractant per a minimitzar certa funció objectiu, cal distingir principalment entre dues aproximacions diferents: *line search* i *trust region* (Nocedal i Wright 2006). En la primera, en cada iteració, la funció objectiu s'aproxima localment com un model senzill —normalment lineal o quadràtic—, es calcula la millor direcció de descens cap al mínim i llavors es decideix quant lluny s'ha d'avançar en aquesta direcció. Els diferents mètodes varien en: 1) com triar la direcció, normalment emprant el gradient; i 2) com calcular la longitud del pas. En canvi, en les aproximacions *trust region* la direcció en la que es realitza el desplaçament en cada iteració s'obté minimitzant una funció simple —normalment quadràtica— per a que es comporti com la funció objectiu dins de certa regió de confiança al voltant del punt sota estudi. Si un pas no és acceptable, es redueix la grandària de la regió i es realitza una nova minimització. Els diferents mètodes varien en: 1) com fer l'aproximació simple de la funció objectiu al voltant del punt en qüestió; i 2) com triar el radi de la regió de confiança, que normalment és esfèrica però que també se'n poden trobar d'el·lipsoïdals.

En certa manera, les aproximacions *line search* i *trust region* difereixen en l'ordre en què trien la *direcció* i la *distància* del moviment cap al següent punt. *Line search* comença fixant la direcció i llavors identifica una distància apropiada, anomenada longitud del pas. En canvi, en la *trust region*, primerament s'escull una distància màxima —el radi de la regió de confiança— i llavors es busca quina és la direcció que ateny la millor millora possible subjecta a aquesta restricció de la distància.

<sup>†</sup> En anglès *Damped Gauss-Newton method* o *Gauss-Newton method with line search*. En moltes referències, per un abús del llenguatge, es cita erròniament aquest mètode, anomenant-lo mètode de Gauss-Newton a seques.



de la segona derivada. Ara bé, en els problemes no lineals la matriu hessiana poques vegades està disponible analíticament, per la qual cosa la utilització d'aquest mètode o del de LM és bastant recomanable.

La segona millora de l'algoritme GN ve de la mà de l'estratègia *trust region* i duu fins al **mètode de Levenberg-Marquardt** (Dennis i Schnabel 1996; Gill, Murray i Wright 1981). El mètode LM és un algorisme molt popular i sovint recomanat en molts articles. En primera instància, pot considerar-se com un mètode *trust region* ja que, per al càlcul de la direcció i del pas, es defineix primer una regió de confiança; però, per altra banda, també pot veure's com una combinació de l'algorisme GNA (amb longituds de pas petites quan es troba a prop del mínim) i del *mètode del gradient*<sup>\*</sup> (amb longituds de pas grans quan es troba lluny del mínim).<sup>†</sup> De totes les versions d'aquest mètode que han estat implementades mitjançant diverses estratègies, la que aquí es contempla és la proposada per Moré (1978), que ofereix una solució robusta, eficient i amb poderoses propietats de convergència similars a les de GNA. Malgrat que teòricament l'algorisme LM és localment lent en quant a convergència en problemes amb grans residuals i fortes no-linealitats, la implementació de Moré (1978) obté resultats força satisfactoris a la pràctica, per la qual cosa és força recomanat. Diferents factors fan que el mètode LM sigui preferible al GNA en diverses problemàtiques. Sense anar més lluny, el mètode LM està ben definit inclús quan la matriu jacobiana no té rang complet. Un altre qüestió és que la longitud del pas en GN és massa llarg, mentre que el de LM és proper al de la direcció d'*Steepest descent* i sovint superior al de GNA.

La utilització d'aquesta estratègia basada en una regió de confiança evita una de les debilitats del GNA, això és, el seu comportament quan la matriu jacobiana no té rang complet. D'altra banda, com que fa les mateixes aproximacions que GNA, les propietats de convergència local d'ambdós mètodes són similars. Altrament, l'atractiu del mètode LM no recau en la seva eficiència, sinó en la seva persistència, segons Gill i Murray (1976). Tot i que no falla amb tanta freqüència com el mètode GNA, pot arribar a tenir una ràtio de convergència molt pobre. A més, és més robust que GN per la qual cosa molts cops troba la solució per molt lluny que comenci del mínim. Els anteriors mètodes (GNA i LN) tal com han estat implementats en el programari de MATLAB són mètodes per a l'optimització sense restriccions, la qual cosa significa que no accepten cap límit per a les seves variables (The MathWorks 2005a).

El **mètode Trust-Region-Reflective** és un algorisme *trust region* que està basat en una variant del mètode de Newton, l'*Interior-Reflective*, descrit per Coleman i Li (1994, 1996). Segons The Mathworks (2005a), en cada iteració aquest mètode aproxima la solució amb un sistema lineal de gran escala mitjançant el

---

<sup>\*</sup> També anomenat *Steepest descent*.

<sup>†</sup> Es creu que els mètodes de Newton modificats només treballen bé a prop de la solució. Aquesta creença ha causat l'aparició de molts algorismes híbrids en què s'empren un altre mètode (normalment l'*steepest descent*) fins que la iteració es troba prop de la solució (Gill, Murray i Wright 1981).

*mètode dels gradients conjugats preconditionats* (PCG, *Preconditioned Conjugate Gradients* en anglès). Aquest és indicat per a la resolució sistemes de gran escala (amb centenars de paràmetres) ja que manté un nivell tolerable tant de la memòria per l'emmagatzematge com dels costos computacionals (Nocedal i Wright 2006).

Els mètodes del tipus gradient conjugat generen direccions de cerca sense emmagatzemar cap matriu, al contrari dels dos mètodes anteriors. Són essencials en les circumstàncies en què les factoritzacions matricials no són viables ja sigui per la seva grandària o per la seva densitat (Gill, Murray i Wright 1981). A més, segons Björck (1996) el fet de *precondicionar* suposa una acceleració en la convergència cap a la solució, ja que transforma l'espai de variables en una forma més adient per la solució numèrica. Els mètodes PCG són de ràpida convergència i exigeix recerques de direccions molt precises, per la qual cosa requereix moltes avaluacions de funcions que la resta de mètodes (Nelles 2001).

Tanmateix, amb tot, la principal restricció que presenten els anteriors algorismes és que duen a terme una recerca local del mínim, de manera que existeix la possibilitat de no convergir cap al veritable mínim global. En efecte, l'obtenció de resultats pobres és fefaent sobretot si no es parteix des d'uns valors inicials adequats. La forma més senzilla d'evitar aquesta situació és començar diverses recerques locals des de diferents valors inicials (tècnica *multi-start* <sup>\*</sup>), per bé que la dificultat rau en l'assenyada elecció d'aquests valors. Així mateix, si no és possible assolir una solució satisfactòria sempre poden aplicar-se les tècniques no lineals d'optimització global per tal de cercar l'òptim global o, en el seu defecte, un bon òptim local.

El CETM disposa de la funció *patternsearch* del *Global Optimization Toolbox* 3.1 (per a MATLAB 7.11) que, en alguns casos, permet trobar el valor òptim global, o en el seu defecte, un bon òptim local. Aquesta funció implementa el **mètode *Pattern search*** (PS), un algorisme de *cerca directa* (*Direct search* en anglès). Aquests darrers són algorismes apropiats per a resoldre problemes d'optimització que no requereixen cap informació sobre el gradient de la funció objectiu. A diferència dels mètodes tradicionals d'optimització, que utilitzen informació sobre el gradient o derivades d'ordre superior, un mètode de cerca directa busca un conjunt de punts al voltant del punt actual, trobant aquell on el valor de la funció objectiu és menor que el valor actual. Són mètodes especialment destinats a solucionar problemes amb la funció objectiu no diferenciable o inclús no continua. Val a dir, però, que aquests algorismes tenen una convergència molt lenta.

---

<sup>\*</sup> Les funcions *GlobalSearch* i *MultiStart* del *Global Optimization Toolbox* de MATLAB utilitzen aquesta tècnica: generen diferents punts inicials, i llavors utilitzen un solucionador local per trobar l'òptim en cadascuna de les conques d'atracció dels punts inicials. Finalment trien el punt que dona un valor de la funció objectiu més petit.

---

En particular, els mètodes PS escolleixen un conjunt de direccions de cerca en cada iteració, anomenat *patró* (*patern* en anglès), i avaluen la funció a certa longitud en cadascuna d'aquestes direccions. Aquests punts candidats formen el que s'anomena *mall*a (*mesh* en anglès) al voltant del punt actual. Si es troba un punt amb un valor de funció significantivament menor, aquest s'adopta en la nova iteració com a punt central, i aquesta mall a és desplaçada fins aquest punt. Tant si es desplaça com si no, la mall a torna a ser alterada en alguna manera —o bé el conjunt de direccions de cerca o bé la longitud del pas varien—, i el procés es repeteix. En alguns casos aquest mètode pot reportar una convergència global, ja que el fet d'utilitzar aquesta mall a és equivalent a elegir diferents punts inicials per a l'optimització. Els diferents mètodes varien en la tria del conjunt de direccions, que es pot realitzar de forma més determinística —com una combinació lineal de direccions base— o de forma més aleatòria; en el cas aquí implementat per MATLAB s'utilitzen vectors de direcció fixa.

Segons The MathWorks (2011a), els solucionadors de l'*Optimization Toolbox* troben generalment un òptim local que pot correspondre també amb un òptim global, i ho fan dins la conca d'atracció del punt inicial. En canvi, els solucionadors del *Global Optimization Toolbox* estan dissenyats per cercar en més d'una conca d'atracció. En particular, la funció *patternsearch* busca en un nombre de punts veïns —i aleshores, amb tota probabilitat, en diferents conques veïnes a la vegada— abans d'acceptar el següent punt on iterar. Aquesta funció és especialment útil per trobar mínims locals de funcions no derivables, i també un únic mínim global en funcions amb restriccions, siguin derivables o no. No obstant això, s'ha de tenir en compte que aquesta funció ofereix una convergència provada cap a un òptim local, tot i que és més lenta que els solucionadors basats en el gradient, ja que no disposa d'informació derivativa.

Si desitgeu aprofundir en les diferents aproximacions, mètodes i algorismes d'optimització, Nelles (2001) dedica una part del seu llibre a presentar-ne els més importants de forma poc detallada i amable per al lector, destacant les propietats de les diferents categories i els pros i els contres de cada algorisme. D'altra banda, Nocedal i Wright (2006) és una obra molt completa on es detallen un gran nombre d'algorismes d'optimització, entre els quals hi ha els aquí tractats. També podeu trobar informació més detallada sobre els mètodes de Gauss-Newton, GNA i LM, i PCG, entre d'altres, en el treball de Dennis i Schnabel (1996), i en el de Gill, Murray i Wright (1981). Per a mètodes numèrics al voltant de l'estructura de mínims quadrats, llegiu Björck (1996). Per a detalls sobre les implementacions d'aquests mètodes vegeu The MathWorks (2005a, 2010, 2011a). La versió del mètode LM implementada per MATLAB la trobareu detallada per Moré (1978). Sobre les diferències existents entre els dos enfocaments a l'hora de realitzar l'optimització (*line search* i *trust region*) dirigiu-vos a Dennis i Schnabel (1996) i a Nocedal i Wright (2006). Finalment, remeteu-vos a The MathWorks (2011a) i a Nocedal i Wright (2006) per a més informació vers els mètodes de cerca directa, i en particular, del *Pattern search*.

#### 4.2.5. Criteris de validació

Un cop calculats els paràmetres que optimitzen el criteri escollit cal saber si aquest model és suficientment *bo*. Aquest és el problema de la validació del model i la manera de realitzar-la és confrontant aquest amb tota la informació possible sobre el sistema real. Això inclou coneixement *a priori*, dades experimentals i experiència en l'ús del sistema. La validació del model passa també per saber si és suficientment vàlid per al propòsit de la modelització, és a dir, per a la simulació, la predicció, el control, etc. (Ljung 1999). Els criteris específics per a prendre aquesta decisió depenen altament del model en qüestió, segons Nelles (2001).

Si l'objectiu és conèixer la qualitat del model —és a dir, en quina mesura és capaç de reproduir nous conjunts de dades— cal diferenciar entre *dades d'estimació*, utilitzades per a estimar el model, i *dades de validació*, no utilitzades per a la minimització del criteri i que han d'excitar el procés i el model particularment en aquelles condicions d'operació que són considerades importants per al subseqüent ús del model, com ara diferents punts d'operació i banda freqüencial de treball (Nelles 2001). D'entre les diverses tècniques, càlculs i mesures de bondat que es poden utilitzar per a la validació d'un model (Ljung 1999; Nelles 2001), en el present projecte s'han considerat els criteris que es presenten tot seguit en aquest apartat.

El primer criteri que cal aplicar per a validar un model és el **sentit comú**. Per a un model construït en termes de paràmetres físics, una validació natural i important és confrontar els valors obtinguts amb el què s'espera d'ells. Per exemple, cal assegurar-se que cert coeficient que s'ha identificat —com ara una longitud, una massa o una resistència òhmica— no tingui un valor negatiu, o cerciorar-se que no sigui d'un ordre desmesuradament diferent del què s'espera ni que resti en una posició de repòs que no li correspon quan les entrades són a zero. Com deien Draper i Smith (1981, p.273) i també recull Ljung (1999, p.517), «the screening of variables should never be left to the sole discretion of any statistical procedure».

La **simulació** és una altra forma de validar els models (Ljung 1999, 2010a; Nelles 2001). A banda dels criteris que es consideren més endavant en aquest apartat, una primera validació pot efectuar-se mitjançant la inspecció visual de les respostes del model i de la planta a les mateixes entrades i veure si realment s'ajusten, més enllà de si ho fan molt o poc (el *quant* ja es determinarà més endavant). La idea central és recórrer a dades que no han estat utilitzades per a l'estimació dels paràmetres —les dades de validació— i que siguin prou representatives —tant en termes de punts d'operació com en freqüència. Tanmateix, si en una primera instància es verifica la qualitat del model amb les pròpies dades d'estimació i els resultats no són suficientment satisfactoris, el model ja no cal que sigui acceptat i es refusa directament.

La simulació pot realitzar-se tant en el domini temporal com en el freqüencial. Així mateix, especial atenció cal parar a les tres respostes clàssiques en simulació, com són la impulsional, la resposta al graó i la sinusoidal. En elles queden reflectides moltes de les propietats dinàmiques del sistema, com ara la constant de temps del sistema, el temps de pujada, el temps d'establiment, el factor d'esmoreïment, entre d'altres.

Fins aquí s'han tingut en compte els aspectes més intuïtius de la validació. A continuació es presenten una sèrie de criteris que determinen quantitativament la qualitat del model —és a dir, *quant* s'ajusta la sortida del model a la sortida del sistema real. En una primera instància, el càlcul d'**estadístiques bàsiques** per als residuals, com ara l'*error màxim* i l'*error quadràtic mitjà* (*eqm*, *Mean Squared Error* en anglès), ofereix el punt de vista més pragmàtic en la quantificació de la validació (Ljung 1999):

$$em = \max_t |e(t)| = \max_t |y(t) - \hat{y}(t)| \quad (4.4)$$

$$eqm = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N |e(t)|^2 = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N |y(t) - \hat{y}(t)|^2 \quad (4.5)$$

Cal ressaltar que allò que realment minimitzen els algorismes de MATLAB és la *funció de cost* (en anglès, *cost function*) i que correspon a l'equació (4.6). És obvi que *eqm* i *cf* estan íntimament relacionades.

$$cf = \sum_{t=1}^N |y(t) - \hat{y}(t)|^2 \quad (4.6)$$

Així mateix, una anàlisi més profunda dels residuals permet discernir de forma més clara si el model construït és vàlid o no. En efecte, en el que resta d'apartats es presenten un conjunt de criteris, cadascun dels quals amb les seves peculiaritats, que normalment són emprats per a la validació tant en la literatura especialitzada com en els diferents programaris d'identificació.

El **coeficient de correlació múltiple** (Ljung 1999) es defineix en estadística com:

$$ccm^2 = 1 - \frac{\sum_{t=1}^N |y(t) - \hat{y}(t)|^2}{\sum_{t=1}^N |y(t)|^2} \quad (4.7)$$

El paràmetre *ccm* representa aquella part de la sortida de la planta que és explicada pel model (normalment expressada en %). Cal que *y(t)* tingui mitjana zero, d'altra banda cal sostreure-li la mitjana.

Una altre criteri de validació, molt relacionat amb l'anterior, és el proposat per Knudsen (2004). La **mitjana quadràtica normalitzada** (*Normed Root Mean Square Output Error* en anglès) es defineix com segueix:

$$errn = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^N |y(t) - \hat{y}(t)|^2}{\sum_{t=1}^N |y(t)|^2}} \cdot 100 \quad [\%] \quad (4.8)$$

Aquest paràmetre és molt expressiu a l'hora de valorar l'error d'ajustament. L'experiència mostra que per a models ben ajustats de sistemes electromecànics amb baixes potències de soroll, s'obtenen valors del 5-8%, mentre que per a models de sistemes més complexos, com els fisiològics, no s'obtenen millor resultats que un 20-25%.

L'**ajust** (*Best Fit* en anglès) de Ljung (2010a) és un paràmetre similar al coeficient de correlació múltiple i es defineix com

$$bf = \left( 1 - \frac{|y - \hat{y}|}{|y - \bar{y}|} \right) \cdot 100 \quad (4.9)$$

on  $y$  és la sortida mesurada en la planta,  $\hat{y}$  és la sortida simulada pel model i  $\bar{y}$  és la mitjana de  $y$ .

Un valor del 100% correspon a un ajustament perfecte, mentre que un 0% indica que l'ajustament és igual que suposar la sortida com una constant ( $\hat{y} = \bar{y}$ ). Per la pròpia definició del paràmetre, és possible obtenir valors negatius. Un ajust negatiu és pitjor que un ajust del 0% i pot ser ocasionat per diversos factors: l'algorisme d'estimació no ha convergit; el model no s'ha estimat minimitzant l'error de predicció; o el conjunt de dades de validació no han estat preprocessades de la mateixa manera que el conjunt de dades d'estimació.

Per saber si l'error de predicció es comporta com el soroll blanc (i.e. màxima aleatorietat i independència entre les pròpies mostres de l'error) es pot calcular l'**autocorrelació dels residuals** (Ljung 1999, 2010a; Landau i Zito, 2006):

$$\hat{R}_e^N(\tau) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N e(t)e(t-\tau) \quad (4.10)$$

La situació ideal ocorre quan, disposant d'un nombre de mostres molt gran, l'autocorrelació val zero fora de l'origen. Tanmateix, en situacions reals aquest mai és el cas perquè, per una banda,  $e(t)$  conté errors estructurals residuals (efectes no lineals, sorolls no gaussians, etc.) i, per l'altra, el nombre de mostres no és suficientment gran. Llavors, com que a la pràctica és impossible que l'autocorrelació fora de l'origen

sigui exactament zero, cal establir els límits d'una regió de confiança\* dins de la qual els residuals es consideren incorrelats i el model vàlid. Landau i Zito (2006) proposen uns criteris de validació pràctics, extensivament posats a prova en diverses aplicacions, i que assumeixen distribucions gaussianes de mitjana zero i desviació estàndard  $1/\sqrt{N}$  per a l'error:

$$\left| \frac{\hat{R}_e^N(\tau)}{\hat{R}_e^N(0)} \right| \leq \frac{c_i}{\sqrt{N}}; \quad \tau \geq 1 \quad (4.11)$$

on  $N$  és el nombre de mostres de l'error de predicció i el coeficient  $c_i$  depèn de l'interval de confiança escollit. Per a un interval d'un 97%,  $c_i = 2,17$ ; per al 95%,  $c_i = 1,96$ ; i per al 93%,  $c_i = 1,808$ . Una altra aproximació pràctica és:

$$\left| \frac{\hat{R}_e^N(\tau)}{\hat{R}_e^N(0)} \right| \leq 0,15; \quad \tau \geq 1 \quad (4.12)$$

Si per contra tots aquests valors tenen una rellevància important per a  $\tau \neq 0$ , això significa que una part d' $e(t)$  podria haver estat predita a partir de dades passades, la qual cosa és un signe de deficiència del model (Ljung 1999).

Paral·lelament també es poden realitzar altres test de blancor (*whiteness test* en anglès) com ara el nombre de canvis de signe d' $e(t)$  o el obtenció d'histogrames, entre d'altres. Més informació a Ljung (1999).

Per a conèixer el grau de correlació entre l'error i les entrades passades es pot calcular la **correlació entre els residuals i les entrades** (Ljung 1999, 2010a; Landau i Zito, 2006; Nelles 2001) en la seva versió general i en la normalitzada:

$$\hat{R}_{ey}^N(\tau) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N e(t)u(t-\tau) \quad (4.13)$$

$$\hat{R}_{ey-norm}^N(\tau) = \frac{\hat{R}_{ey}^N(\tau)}{\left[ \left( \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N u^2(t) \right) \left( \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N e^2(t) \right) \right]^{1/2}} \quad (4.14)$$

La situació teòrica en l'estimació òptima preveu que la incorrelació sigui perfecta —és a dir, que valgui zero— entre l'error i l'entrada. Si més no, a la pràctica no és el cas, i s'espera que aquesta mesura sigui

---

\* L'interval de confiança correspon al marge de valors de la resposta que tenen una probabilitat específica (95%, 96%, etc. segons s'estableixin els límits) de ser l'actual resposta del sistema.

més petita quant millor sigui el model. Landau i Zito (2006) proposen uns criteris de validació pràctics basats en els intervals de confiança, extensivament posats a prova en diverses aplicacions, i que assumeixen distribucions gaussianes de mitjana zero i desviació estàndard  $1/\sqrt{N}$  per a l'error:

$$\left| \hat{R}_{ey-norm}^N(\tau) \right| \leq \frac{c_i}{\sqrt{N}}; \quad \tau \geq 1 \quad (4.15)$$

on  $N$  és el nombre de mostres de l'error de predicció i de l'entrada, i el coeficient  $c_i$  depèn de l'interval de confiança escollit. Per a un interval d'un 97%,  $c_i = 2,17$ ; per al 95%,  $c_i = 1,96$ ; i per al 93%,  $c_i = 1,808$ .

Una altra aproximació pràctica és:

$$\left| \hat{R}_{ey-norm}^N(\tau) \right| \leq 0,15; \quad \tau \geq 1 \quad (4.16)$$

Si no es compleixen aquests criteris, significa que hi ha indicis d'entrades passades en els residuals, la qual cosa implica que hi haurà una part d' $y(t)$  que s'origina a partir d'entrades passades i això no s'ha recollit adequadament per part del model. Llavors, el model ha de ser millorat.

Finalment, una darrera prova de validació és la representació de la **resposta freqüencial** (Ljung 2010a). La resposta freqüencial descriu de quina manera el model respon a entrades sinusoïdals. En un sistema lineal, si l'entrada és un senyal sinusoïdal a certa freqüència, llavors la sortida també és a la mateixa freqüència. Tanmateix, la magnitud i la fase de la resposta han variat respecte a les de l'entrada. En canvi, en un sistema no lineal la resposta a certa freqüència no té perquè correspondre amb una sortida a la mateixa freqüència. Llavors, una anàlisi freqüencial permet comprendre la dinàmica del sistema i a obtenir informació molt útil —com per exemple, l'ample de banda, la posició i la magnitud del pic de ressonància— tant per a la construcció del sistema com per a la seva posterior validació. En definitiva, la comparativa a nivell freqüencial entre la sortida de la planta i la del model com a resposta de la mateixa entrada és una eina molt útil per a la validació.

### 4.3. Disseny dels experiments: full de ruta

De forma similar a la modelització, el procés d'identificació també s'efectua aïllant diferents parts del sistema de manera independent amb l'objectiu de reduir la complexitat del problema. Així doncs, es divideix la identificació en quatre grans blocs: els motors, el pla vertical, el pla horitzontal i el TRMS totalment lliure. Per tot això, el full de ruta és el que a continuació es detalla.





#### 4.4. Identificació del motor CC de cua

S'excita amb diferents senyals d'entrada el rotor de cua i es mesura el voltatge en el tacòmetre corresponent. Amb aquestes dades s'ajusten els valors d'alguns paràmetres del model per tal que aquest descrigui correctament el comportament del motor.

##### 4.4.1. Equacions, diagrama de blocs i paràmetres a identificar

Segons l'apartat 3.9, les equacions particularitzades que regeixen el comportament del motor de cua són:

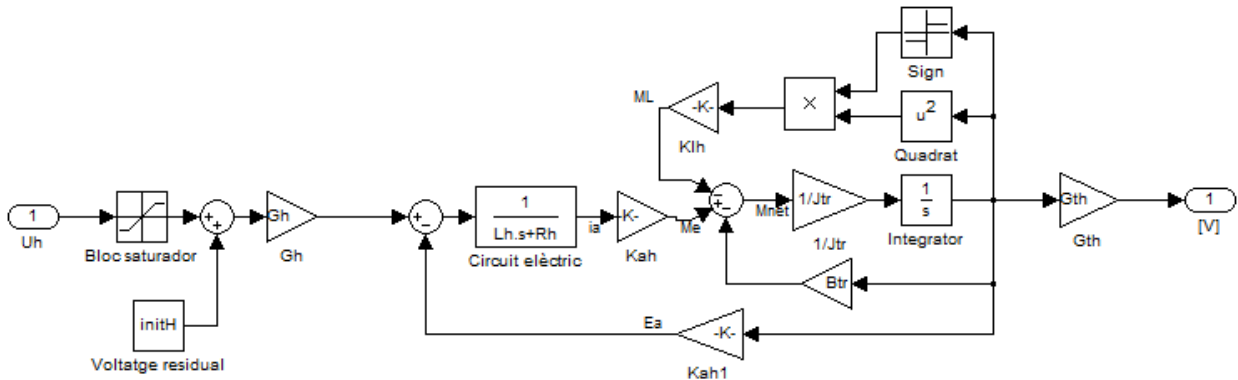
$$\frac{di_{ah}}{dt} = -\frac{R_{ah}}{L_{ah}}i_{ah} - \frac{k_{ah}}{L_{ah}}\omega_h + \frac{V_h}{L_{ah}} \quad (4.17)$$

$$\frac{d\omega_h}{dt} = \frac{k_{ah}}{J_{tr}}i_{ah} - \frac{B_{tr}}{J_{tr}}\omega_h - \frac{f_3(\omega_h)}{J_{tr}} \quad (4.18)$$

on

$$f_3(\omega_h) = k_{Lh} \cdot \text{sign}(\omega_h) \cdot \omega_h^2$$

Tanmateix, per a la identificació experimental dels paràmetres, també s'han de considerar l'etapa preliminar i el guany dels tacòmetres, analitzats en els apartats 3.3 i 3.4.4, respectivament. Un cop integrades totes les parts, el model SIMULINK amb el qual realitzar els experiments és el següent:



**Figura 4.4** Diagrama de blocs SIMULINK per a la identificació dels paràmetres del motor de cua

En la Taula 4.1 s'aprecien els valors originals dels paràmetres que serveixen com a punt inicial per al càlcul d'optimització.

Paràmetre	Valor
$SupH$	+2,5
$InfH$	-2,5
$init_h$	-0,0250
$G_h$	6,5
$R_{ah}$	8
$L_{ah}$	$8,6 \cdot 10^{-4}$
$k_{ah}$	0,0202
$J_{tr}$	$2,48 \cdot 10^{-5}$
$B_{tr}$	$2,3 \cdot 10^{-5}$
$k_{Lh}$	$3,6 \cdot 10^{-7}$
$G_{th}$	-

**Taula 4.1** Paràmetres i llurs valors inicials per a la identificació del motor de cua

#### 4.4.2. Temps de mostreig i senyals d'entrada

Malgrat que el manual d'experiments del TRMS (Feedback Instruments 2006a) recomana realitzar els experiments amb un temps de mostreig de 0,001 s, per a la identificació del rotor de cua s'ha optat per augmentar-lo fins a 0,01 s. Aquesta decisió està recolzada pel fet que amb el temps de mostreig d'1 ms la relació senyal-soroll (SNR) és força baixa, i la captura dels senyals, sobretot per a entrades d'amplitud gran, és molt sorollosa.

Després d'experimentar amb diferents senyals d'entrada i veure quin aporta més informació sobre el sistema, finalment s'opta per utilitzar una combinació de graons de diferents amplituds (cada 0,5 V) dins del marge d'operació del TRMS ( $\pm 2,5$  V); aquests senyals compleixen les condicions d'Ahmad *et al.* (2002) mencionades a l'apartat 4.2.2.

#### 4.4.3. Captura de dades

S'han realitzat un total de deu captures en el tacòmetre del motor de cua del TRMS. Cada captura consisteix en la resposta a un graó de durada 50 s i, en aquest punt, l'entrada passa a ser zero fins a completar els 100 s. Les diferents amplituds considerades per als graons d'entrada són  $\pm 0,5$  V,  $\pm 1$  V,  $\pm 1,5$  V,  $\pm 2$  V i  $\pm 2,5$  V, tal com s'aprecia en la Figura 4.5. Observeu en la part final de la gràfica que, malgrat que les entrades es troben a zero, el tacòmetre continua indicant una petita velocitat de les pales.

A més, mitjançant l'ajuda d'un tacòmetre de mà òptic (vegeu l'annex), s'ha mesurat la velocitat en rpm associada a la resposta de cada graó quan aquesta es troba en règim permanent (entre els segons 20 i 50). Per a cada senyal s'han efectuat fins a tres mesures diferents tal com s'aprecia en la Figura 4.6.

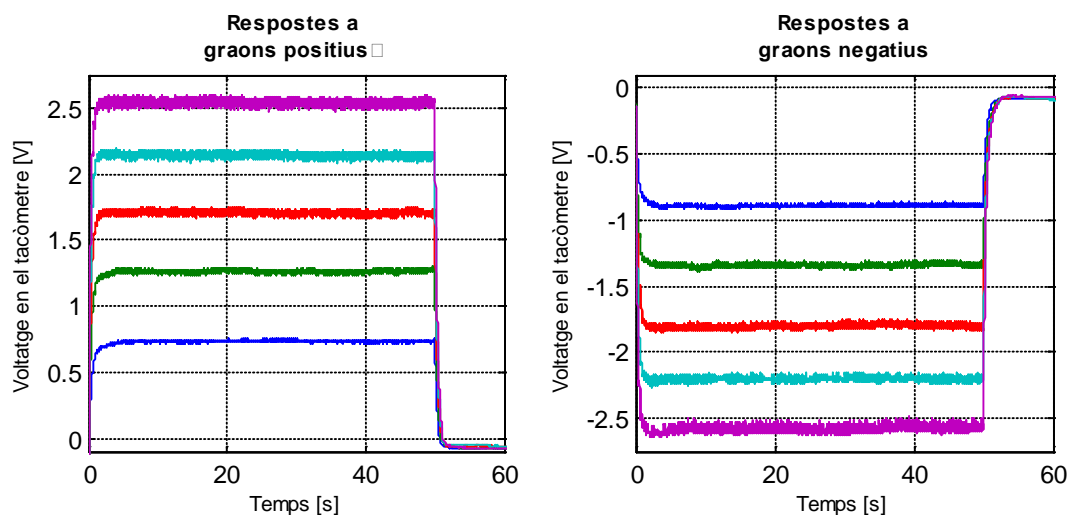


Figura 4.5 Captures en el tacòmetre del motor de cua

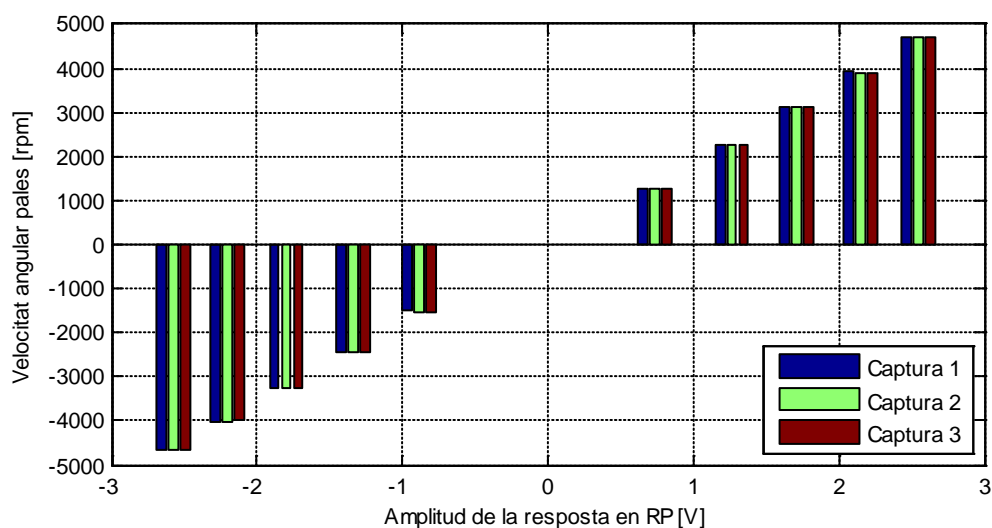


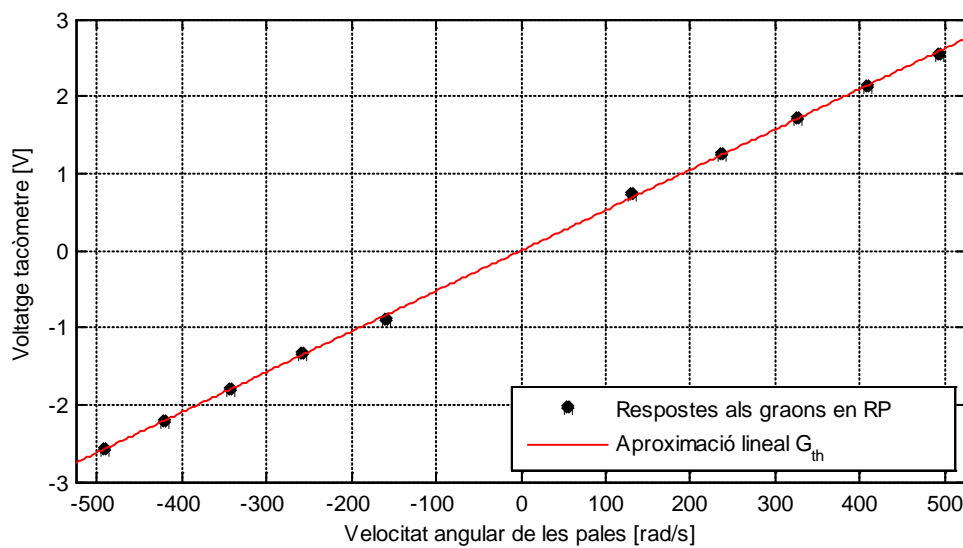
Figura 4.6 Captures amb el tacòmetre òptic de la velocitat de les pales del motor de cua en funció de la resposta de cada graó en RP

#### 4.4.4. Experiments i resultats

El primer experiment consisteix en donar un valor al guany  $G_{th}$  del model lineal del tacòmetre. Per fer-ho, s'han considerat les captures de la Figura 4.6 efectuades amb el tacòmetre òptic. En primer lloc es fa la mitjana de totes elles per trobar un valor representatiu de cada resposta, a més de convertir-les a rad/s. Tot seguit, es calcula la relació lineal que existeix entre cadascun d'aquests valors i el valor en règim permanent de cada resposta al graó (mitjana des del segon 20 al 50) per tal d'obtenir la relació entre velocitat i voltatge. La GUI *Basic Fitting* (del MATLAB 7.11), que permet calcular els coeficients del polinomi de primer ordre en un sentit de mínims quadrats, obté per al polinomi de la Figura 4.7 un

pendent de  $0,0052493 \text{ V}\cdot\text{s}/\text{rad}$  i un terme independent menyspreable amb un  $eqm$  de  $8,2\cdot 10^{-3}$ . Per tant, el valor del guany del tacòmetre de cua és  $G_{th} = 5,2493\cdot 10^{-3} \text{ V}\cdot\text{s}/\text{rad}$ .

El següent pas és l'extracció de dades de les deu captures de la Figura 4.5 per a la creació de la resposta del motor a entrada nul·la. Aquesta resposta es construeix a partir de la part final d'aquestes captures (en l'interval 85–100 s) atesa la divergència de valors que hi existeix. Mitjançant el càlcul de la mitjana de tots ells, es tracta de trobar un valor suficientment representatiu per quan l'entrada siguin zero. Els càlculs donen un valor d' $S_{cua} = -0,0888 \text{ V}$ . Considerarem que aquest valor és el que tindrà el tacòmetre del motor de cua quan l'entrada sigui zero i, per tant, serà com un graó més a l'hora de realitzar l'optimització dels paràmetres.



**Figura 4.7** Captures de la velocitat de les pales del motor de cua en funció de cada graó

A continuació, previ a la pròpia optimització, es procedeix al processament de les dades capturades. Per una banda, es retallen les captures cenyint-nos a l'interval 0–50 s. Per l'altra, com a valor representatiu de la resposta a entrada nul·la, s'hi afegeix el conjunt de dades compostat per una entrada de 0 V amb una sortida de  $-0,0888 \text{ V}$ . I finalment, considerant que aquestes captures encara tenen una SNR bastant pobre, es realitza un filtratge passabaixes amb freqüència de tall 5 Hz mitjançant el *System Identification Toolbox*. L'elecció de la freqüència de tall es duu a terme mitjançant el mètode de prova i error, de forma que els senyals filtrats respectin la dinàmica de les gràfiques. Convé ressaltar també que el filtratge s'aplica tant a les entrades com a les sortides, i el resultat pot observar-se en la Figura 4.8.

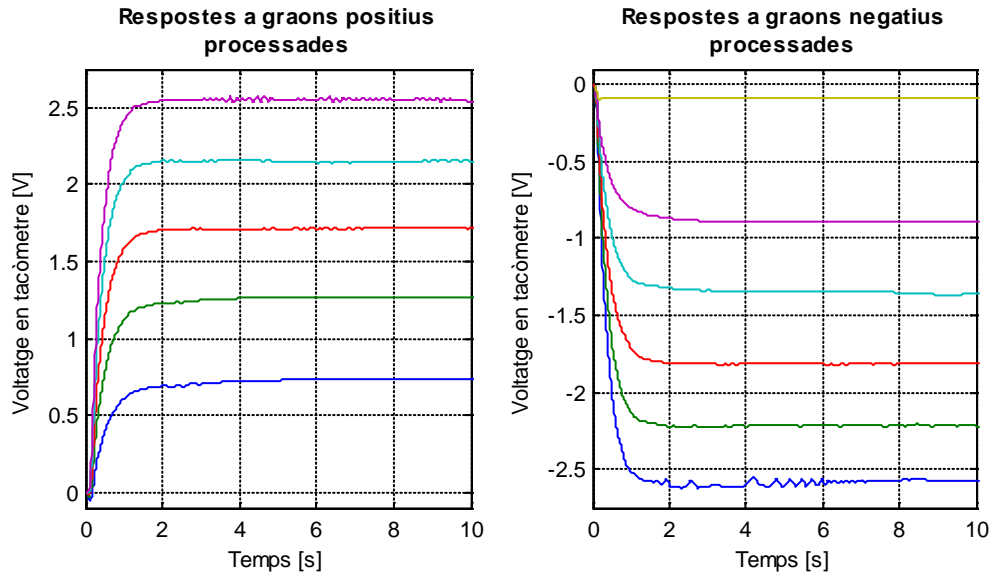


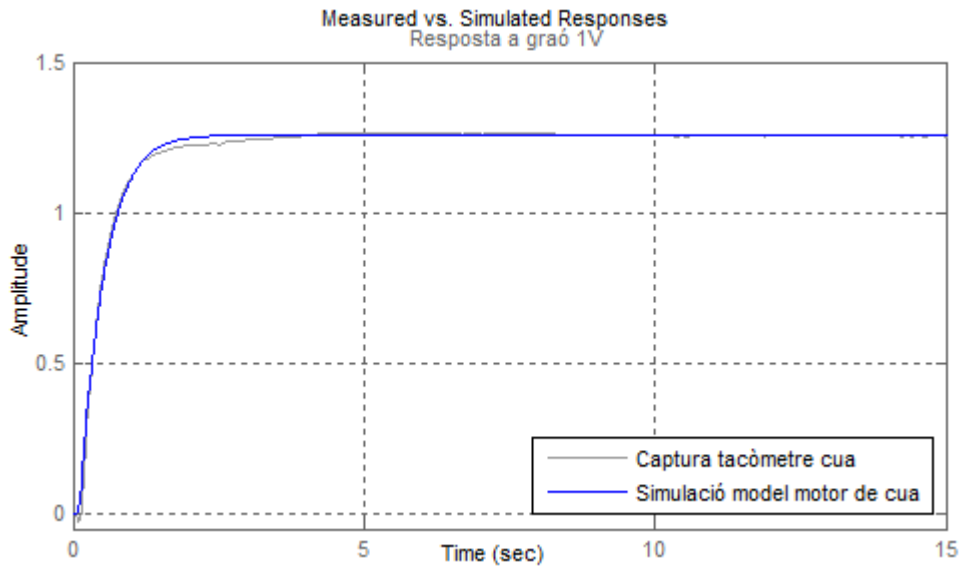
Figura 4.8 Captures del tacòmetre de cua després del processament

Un cop les dades es disposen en la forma més adient per a la seva utilització, s'inicia el procés en si d'optimització. En primer lloc, cal cerciorar-se que es parteix des de bons valors inicials. Com és sabut, la idea central és començar les iteracions en un punt que es trobi en la conca d'atracció del punt òptim per llavors poder aplicar un mètode local de ràpida convergència, com ara el Levenberg-Marquardt. En particular, si es realitzen simulacions amb els valors de la Taula 4.1, es pot comprovar que les sortides del model tenen un ordre bastant inferior al de les corresponents captures, fet que indica una *llunyania* important respecte al mínim buscat. Aleshores, es fa necessària una primera aproximació de  $G_h$  per tal que la resposta del model i la del sistema siguin *gairebé* del mateix ordre. Cal tenir present que ara no es prima que ambdós senyals siguin idèntics en règim transitori, sinó que els seus valors en règim permanent siguin aproximadament els mateixos; d'aquesta manera el punt de partida serà més proper a la conca d'atracció desitjada. En definitiva, el valor de  $G_h$  s'ajusta en 15,5 V amb el mètode de prova i error.

Per refinar el valor inicial a partir del qual es realitzarà l'optimització final, es duu a terme el següent experiment: considerant exclusivament la captura relativa al graó d'1 V, es tracta de reajustar els valors dels paràmetres  $B_{tr}$ ,  $G_h$ ,  $J_{tr}$  i  $k_{Lh}$  de manera que el model adopti també la seva dinàmica en el règim transitori. La justificació de la tria d'aquests paràmetres en concret es basa exclusivament en diferents experiments en el laboratori, dels quals s'obtenen diferents resultats segons la combinació triada. En particular, es prescindeix del paràmetre  $init_h$  ja que el seu ordre és molt petit en comparació a la resposta del motor, i la seva inclusió només aportaria més complexitat en els càlculs.

En conseqüència, l'aplicació del mètode de Levenberg-Marquardt mitjançant el CETM aconsegueix uns resultats molt satisfactoris de forma molt ràpida (10 iteracions en un temps de 10 minuts), amb una funció de cost de 0,3482 ( $eqm = 6,96 \cdot 10^{-5}$ ), tal com pot apreciar-se en la Figura 4.9. Els paràmetres han quedat

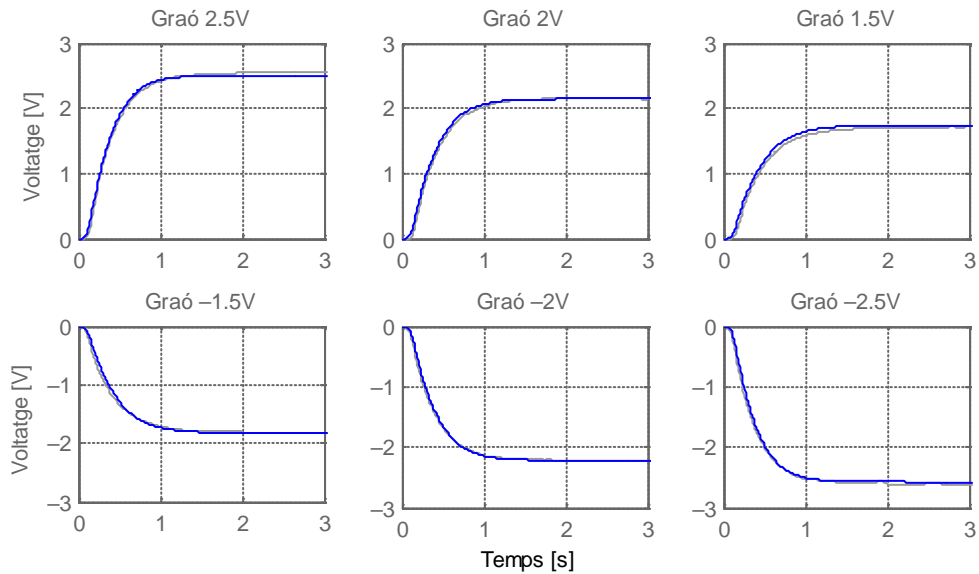
ajustats amb uns valors de  $B_{tr} = 13,05 \cdot 10^{-5} \text{ N} \cdot \text{s} \cdot \text{m}/\text{rad}$ ,  $G_h = 22,76$ ,  $J_{tr} = 10,94 \cdot 10^{-5} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$  i  $k_{Lh} = 2,13 \cdot 10^{-7} \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^2/\text{rad}^2$ .



**Figura 4.9** Respostes al graó d'1 V del motor de cua i del seu model durant l'elecció del punt inicial

Finalment, aplicant la combinació de tots els graons —solució a l'equació (4.3)—, es procedeix a l'optimització definitiva dels paràmetres  $B_{tr}$ ,  $G_h$ ,  $J_{tr}$ ,  $k_{Lh}$  i  $init_h$  mitjançant el mètode de Levenberg-Marquardt. Criteris similars als de l'experiment anterior, basats en experiments al laboratori, serveixen per escollir aquesta tria concreta de paràmetres i no una altra. En només 5 iteracions i poc menys d'una hora, aquest mètode ajusta els paràmetres amb una funció de cost de 49,06 ( $eqm = 8,92 \cdot 10^{-4}$ ), i les característiques dinàmiques del sistema queden captades pel model, tal com es pot veure en la Figura 4.10. Els nous valors que fan això possible són:  $B_{tr} = 10,01 \cdot 10^{-5} \text{ N} \cdot \text{s} \cdot \text{m}/\text{rad}$ ,  $G_h = 22,78$ ,  $J_{tr} = 10 \cdot 10^{-5} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ ,  $k_{Lh} = 3,02 \cdot 10^{-7} \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^2/\text{rad}^2$  i  $init_h = -0,0485 \text{ V}$ .

Convé ressaltar que, emprant el mètode d'optimització de *Pattern search*, s'obtenen resultats similars, tot i que el cost computacional i de temps són molt més elevats. Sense anar més lluny, allò que el mètode LS ha calculat en una hora, el mètode PS tarda un dia i mig, aproximadament. Tanmateix, cal insistir en què l'èxit d'aquests bons resultats rau en l'adequada elecció de valors inicials que, juntament amb el mètode LS, permeten ajustar els valors dels paràmetres de forma ràpida.



**Figura 4.10** Respostes del motor de cua i del seu model a graons de diferent amplitud  
(gris: motor; blau: model)

En resum, en la Taula 4.2 es mostren els valors originals i els identificats dels paràmetres dels models de l'etapa preliminar, del motor de cua i el guany del tacòmetre.

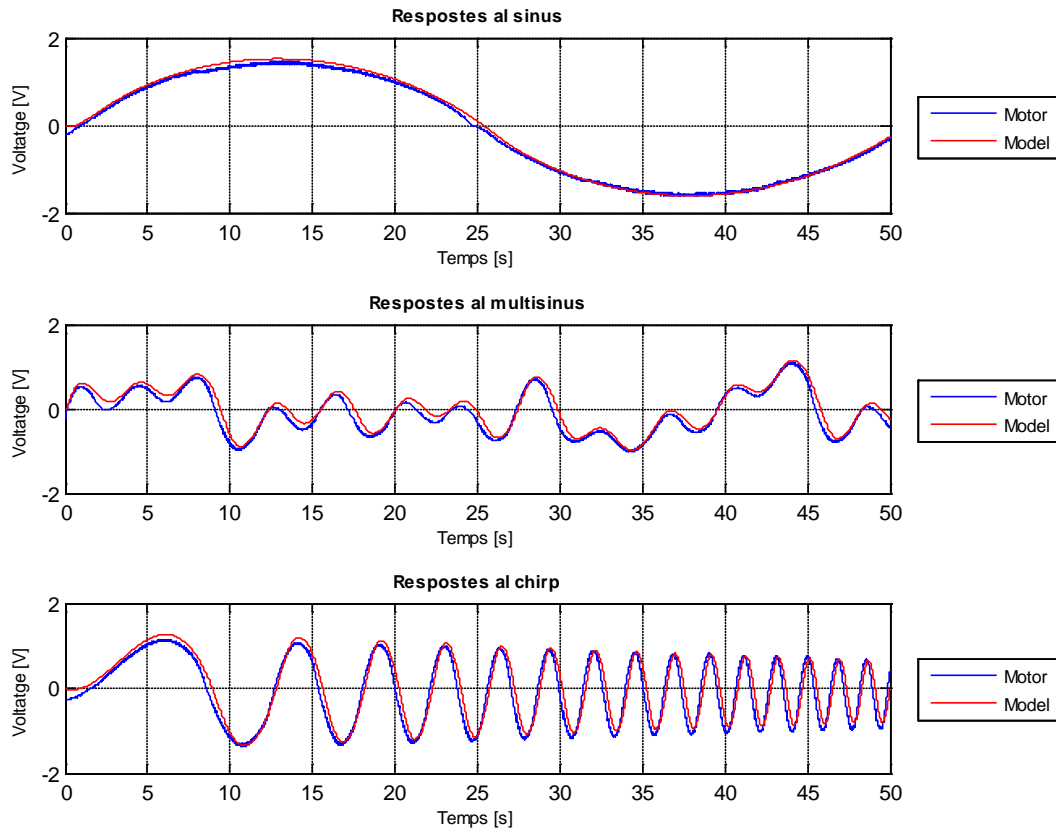
Paràmetre	Valor original	Valor ajustat
$SupH$	+2,5	+2,5
$InfH$	-2,5	-2,5
$init_h$	-0,0250	<b>-0,0485</b>
$G_h$	6,5	<b>22,78</b>
$R_{ah}$	8	8
$L_{ah}$	$8,6 \cdot 10^{-4}$	$8,6 \cdot 10^{-4}$
$k_{ah}$	0,0202	0,0202
$J_{tr}$	$2,48 \cdot 10^{-5}$	<b><math>10 \cdot 10^{-5}</math></b>
$B_{tr}$	$2,3 \cdot 10^{-5}$	<b><math>10,01 \cdot 10^{-5}</math></b>
$k_{Lh}$	$3,6 \cdot 10^{-7}$	<b><math>3,02 \cdot 10^{-7}</math></b>
$G_{th}$	-	<b><math>5,25 \cdot 10^{-3}</math></b>

**Taula 4.2** Paràmetres del model del motor de cua  
i llurs valors originals i ajustats (en negreta)

#### 4.4.5. Validació

Per a la validació del model del motor de cua, es capturen les respostes del sistema per a diversos senyals d'entrada que pretenen ser suficientment representatius. Aleshores, s'excita el motor de cua mitjançant tres senyals diferents: a) un sinus de freqüència 0,02 Hz i amplitud 1,25 V; b) un multisinus de freqüències 0,2 Hz, 0,25 Hz, 0,36 Hz, 0,4 Hz, 0,45 Hz i 0,6 Hz; i c) un *chirp* d'amplitud 1 V i un escombrat de freqüència lineal de 0,01 Hz a 0,6 Hz en 50 s. En la Figura 4.11 es poden veure les respostes a aquests senyals del motor de cua i del model obtingut.





**Figura 4.11** Respostes del motor de cua i del seu model a diferents entrades

A simple vista, el model obtingut representa bé la dinàmica del motor de cua. Quantitativament, alguns dels criteris de validació en cadascun dels casos es mostren en la Taula 4.3.

Entrada	eqm	errn (%)
Sinus	$4,13 \cdot 10^{-3}$	5,69
Multisinus	$14,03 \cdot 10^{-3}$	23,34
Chirp	$17,75 \cdot 10^{-3}$	17,31

**Taula 4.3** Criteris de validació per al motor de cua

## 4.5. Identificació del motor CC principal

S'excita el rotor principal amb diferents senyals d'entrada i es mesura el voltatge en el tacòmetre corresponent. Amb aquestes dades s'ajusten els valors d'alguns paràmetres del model per tal que aquest descrigui correctament el comportament del motor.

#### 4.5.1. Equacions, diagrama de blocs i paràmetres a identificar

Segons l'apartat 3.9, les equacions particularitzades que regeixen el comportament del motor principal són:

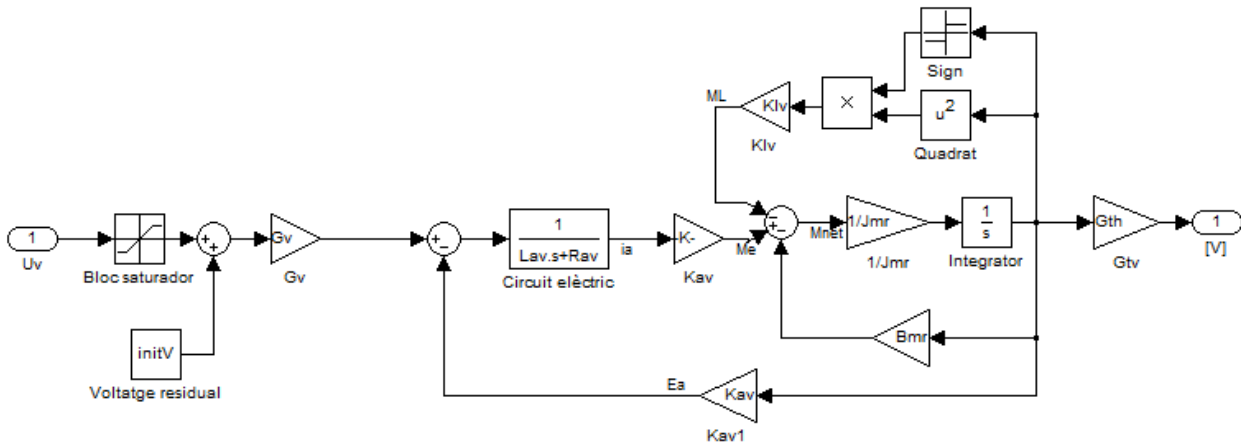
$$\frac{di_{av}}{dt} = -\frac{R_{av}}{L_{av}}i_{av} - \frac{k_{av}}{L_{av}}\omega_v + \frac{V_v}{L_{av}} \quad (4.19)$$

$$\frac{d\omega_v}{dt} = \frac{k_{av}}{J_{tr}}i_{av} - \frac{B_{mr}}{J_{mr}}\omega_v - \frac{f_1(\omega_v)}{J_{mr}} \quad (4.20)$$

on

$$f_1(\omega_v) = k_{Lv} \cdot \text{sign}(\omega_v) \cdot \omega_v^2$$

Tanmateix, de forma similar a la identificació del motor de cua, també s'han de considerar l'etapa preliminar i el guany dels tacòmetres, analitzats en els apartats 3.3 i 3.4.4, respectivament. Un cop integrades totes les parts, el model SIMULINK amb el qual realitzar els experiments és el següent:



**Figura 4.12** Diagrama de blocs SIMULINK per a la identificació dels paràmetres del motor principal

En la Taula 4.4 s'hi reflecteixen els valors originals dels paràmetres que serveixen com a punt inicial per al càlcul d'optimització.

Paràmetre	Valor
$SupV$	+2,5
$InfV$	-2,5
$init_v$	0.0
$G_v$	8,5
$R_{av}$	8
$L_{av}$	$8,6 \cdot 10^{-4}$
$k_{av}$	0,0202
$J_{mr}$	$12,72 \cdot 10^{-5}$
$B_{mr}$	$4,5 \cdot 10^{-5}$
$k_{Lv}$	$8,7 \cdot 10^{-7}$
$G_{rv}$	-

**Taula 4.4** Paràmetres i llurs valors inicials per a la identificació del motor principal

#### 4.5.2. Temps de mostreig i senyals d'entrada

Tal com ocorre en el cas del motor de cua, quan es realitzen els experiments amb un temps de mostreig de 0,001 s, la relació senyal-soroll és bastant baixa; això genera captures sorolloses i amb una excessiva variància. Per aquesta raó, en la identificació del motor principal també s'empra un temps de mostreig més gran (0,01 s).

Després d'experimentar amb diferents senyals d'entrada i veure quin aporta més informació sobre el sistema, finalment s'opta per utilitzar una combinació de graons de diferents amplituds (cada 0,5 V) dins del marge d'operació del TRMS ( $\pm 2,5$  V); aquests senyals compleixen les condicions d'Ahmad *et al.* (2002) mencionades a l'apartat 4.2.2.

#### 4.5.3. Captura de dades

S'han realitzat un total de deu captures en el tacòmetre del motor principal del TRMS. Cada captura consisteix en la resposta a un graó de durada 50 s i, en aquest punt, l'entrada passa a ser zero fins a completar els 100 s. Les diferents amplituds considerades per als graons d'entrada són  $\pm 0,5$  V,  $\pm 1$  V,  $\pm 1,5$  V,  $\pm 2$  V i  $\pm 2,5$  V, tal com s'aprecia en la Figura 4.13. Observeu en la part final de la gràfica que, malgrat que les entrades es troben a zero, el tacòmetre continua indicant una petita velocitat de les pales, aquest cop de menor amplitud que en el motor de cua.

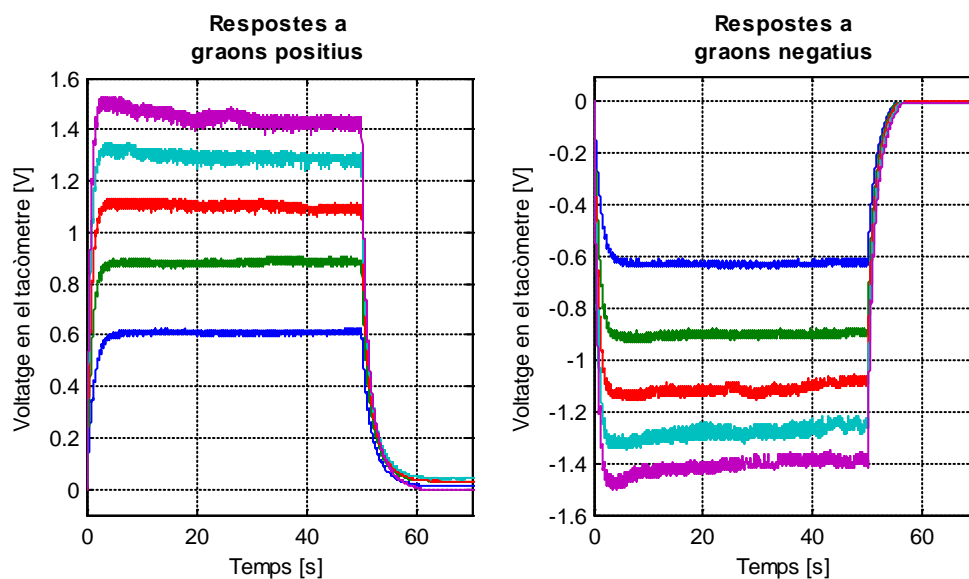


Figura 4.13 Captures en el tacòmetre del motor principal

A més, mitjançant l'ajuda del tacòmetre òptic de mà, s'ha mesurat la velocitat en rpm associada a la resposta de cada graó quan aquesta es troba en règim permanent (entre els segons 20 i 50). Per a cada senyal s'han efectuat fins a tres captures diferents tal com s'aprecia en la Figura 4.14.

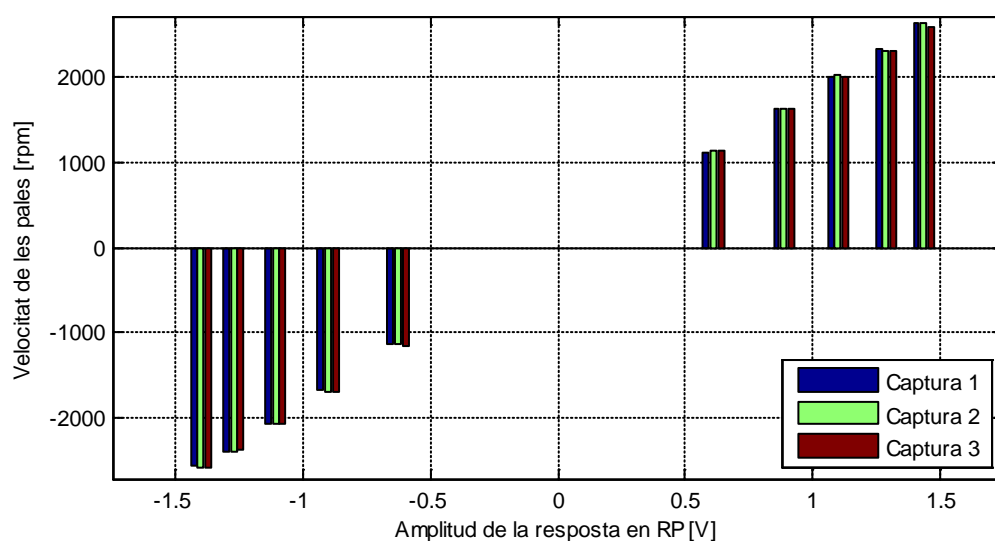


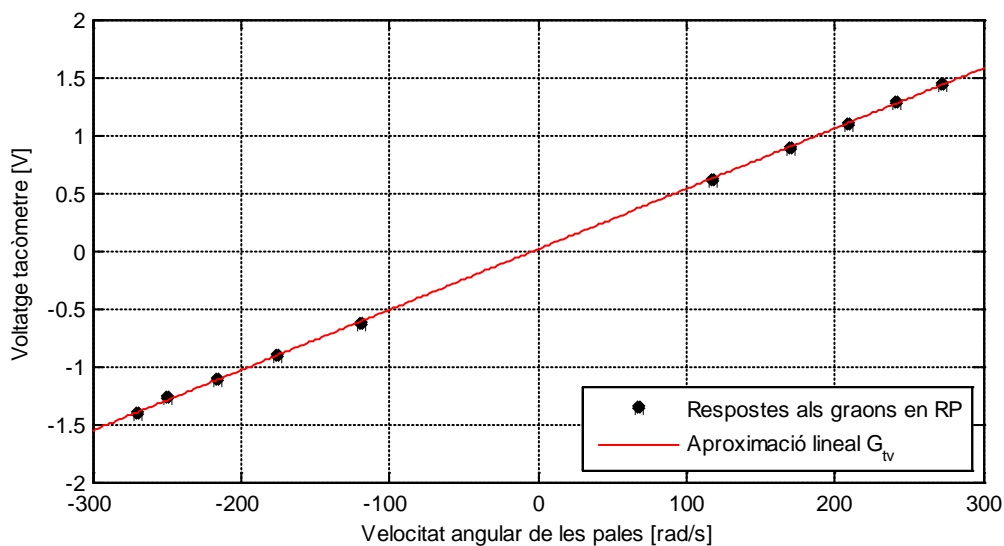
Figura 4.14 Captures amb el tacòmetre òptic de la velocitat de les pales del motor principal en funció de la resposta de cada graó en RP

#### 4.5.4. Experiments i resultats

El procediment per identificar els paràmetres del motor principal segueix exactament el mateix patró que el motor de cua gràcies en part als bons resultats obtinguts. El primer experiment consisteix novament en donar un valor al guany  $G_{ty}$  del model lineal del tacòmetre mitjançant les captures efectuades amb el tacòmetre òptic. En primer lloc es fa la mitjana de totes elles per trobar un valor representatiu de cada

resposta, a més de convertir-les a rad/s. Tot seguit, es calcula la relació lineal que existeix entre cadascun d'aquests valors i el valor en règim permanent de cada resposta al graó (mitjana des del segon 20 al 50) per tal d'obtenir la relació entre velocitat i voltatge. Mitjançant la GUI *Basic Fitting* es calculen els coeficients del polinomi de primer ordre en un sentit de mínims quadrats i, per al polinomi de la Figura 4.15, s'obté una pendent valor  $0,0052263 \text{ V}\cdot\text{s}/\text{rad}$  i un terme independent menyspreable amb un *eqm* de  $3,48\cdot 10^{-3}$ . Per tant, el valor del guany del tacòmetre de cua és:  $G_{tv} = 5,2263\cdot 10^{-3} \text{ V}\cdot\text{s}/\text{rad}$ .

El següent pas és l'extracció de dades de les deu captures de la Figura 4.13 per a la creació de la resposta del motor a entrada nul·la. Aquesta resposta es construeix a partir de la part final d'aquestes captures (en l'interval 85–100 s) atesa la divergència de valors que hi existeix. Mitjançant el càlcul de la mitjana de tots ells, es tracta de trobar un valor suficientment representatiu per quan l'entrada siguin zero. Els càlculs donen un valor d' $S_{cua} = -0,0086 \text{ V}$ . Considerarem que aquest valor és el que tindrà el tacòmetre del motor principal quan l'entrada sigui zero i, per tant, serà com un graó més a l'hora de realitzar l'optimització dels paràmetres.



**Figura 4.15** Captures de la velocitat de les pales del motor principal en funció de cada graó

A continuació, previ a la pròpia optimització, es procedeix al processament de les dades capturades. Per una banda, es retallen les captures cenyint-nos a l'interval 0–50 s. Per l'altra, com a valor representatiu de la resposta a entrada nul·la, s'hi afegeix el conjunt de dades compost per una entrada de 0 V amb una sortida de  $-0,0086 \text{ V}$ . I finalment, considerant que aquestes captures encara tenen una SNR molt pobre, es realitza un filtratge passabaixes amb freqüència de tall 5 Hz mitjançant el *System Identification Toolbox*. L'elecció de la freqüència de tall es duu a terme mitjançant el mètode de prova i error, de forma que els senyals filtrats respectin la dinàmica de les gràfiques. Convé ressaltar també que el filtratge s'aplica tant a les entrades com a les sortides. El resultat d'aquesta operació pot observar-se en la Figura 4.16.

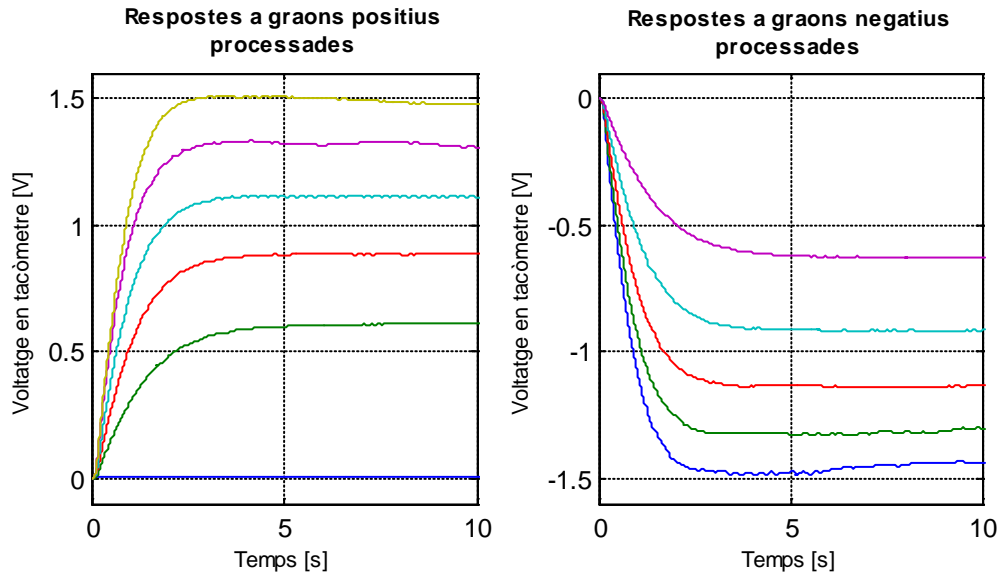


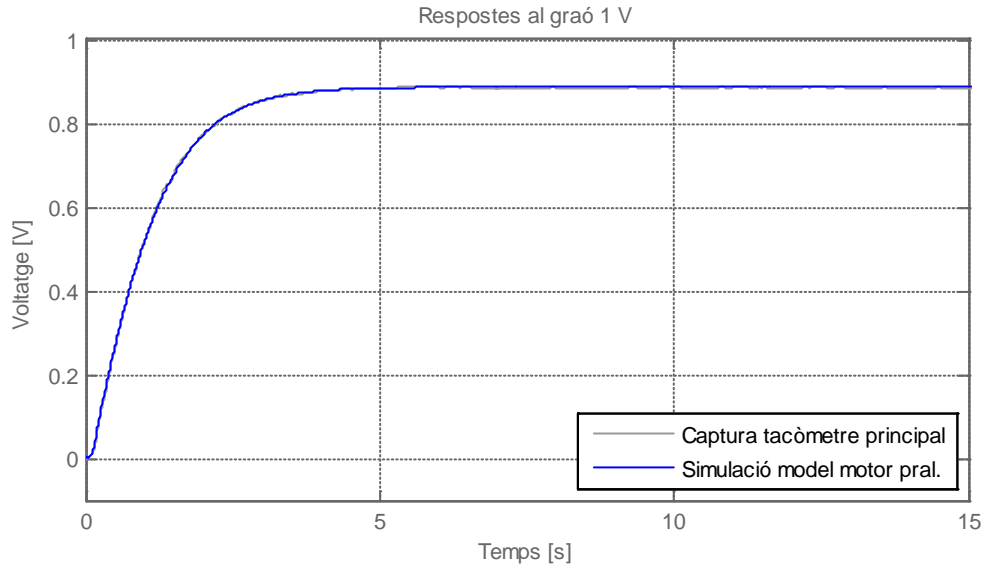
Figura 4.16 Captures del tacòmetre principal després del processament

Un cop les dades es disposen en la forma més adient per a la seva utilització, s'inicia el procés en si d'optimització. En primer lloc, cal cerciorar-se que es parteix de bons valors inicials. Com és sabut, la idea central és començar les iteracions en un punt que es trobi en la conca d'atracció del punt òptim per llavors poder aplicar un mètode local de ràpida convergència. En particular, si es realitzen simulacions amb els valors de la Taula 4.4, es pot comprovar que les sortides del model tenen un ordre bastant inferior al de les corresponents captures, fet que indica una *llunyania* important respecte al mínim buscant. Aleshores, es fa necessària una primera aproximació de  $G_v$  per tal que la resposta del model i la del sistema siguin *gairebé* del mateix ordre. Cal tenir present que ara no es prima que ambdós senyals siguin idèntics en règim transitori, sinó que els seus valors en règim permanent siguin aproximadament els mateixos; d'aquesta manera el punt de partida serà més proper a la conca d'atracció desitjada. En definitiva, mitjançant el mètode de prova i error, el valor de  $G_v$  queda ajustat en 16,35 V.

Per refinar el valor inicial a partir del qual es realitza l'optimització final, es duu a terme el següent experiment: considerant exclusivament la captura relativa al graó d'1 V, es tracta de reajustar els valors dels paràmetres  $B_{mr}$ ,  $G_v$ ,  $J_{mr}$  i  $k_{Lv}$  de manera que el model adopti també la seva dinàmica en el règim transitori. La justificació de la tria d'aquests paràmetres en concret es basa, com en el motor de cua, exclusivament en diferents experiments en el laboratori, dels quals s'obtenen diferents resultats segons la combinació triada. En particular, es prescindeix del paràmetre  $init_v$  ja que el seu ordre és molt petit en comparació a la resposta del motor, i la seva inclusió només aportaria més complexitat en els càlculs.

En conseqüència, amb l'aplicació del mètode de *Pattern search* via CETM s'aconsegueix uns resultats molt satisfactoris —amb una funció de cost de 0,0456 i un  $eqm$  de  $9,12 \cdot 10^{-6}$ — de forma relativament ràpida pel que acostuma a demorar-se aquest mètode (102 iteracions en un temps de 45 minuts), tal com

pot apreciar-se en la Figura 4.17. Els paràmetres han quedat ajustats amb uns valors de  $B_{mr} = 5,36 \cdot 10^{-5}$  N·s·m/rad,  $G_v = 16,17$ ,  $J_{mr} = 29,28 \cdot 10^{-5}$  kg·m<sup>2</sup> i  $k_{Lv} = 8,01 \cdot 10^{-7}$  N·m·s<sup>2</sup>/rad<sup>2</sup>. Tanmateix, cal assenyalar que en aquest cas la resolució del problema mitjançant el mètode de Levenberg-Marquardt ofereix pitjors resultats, ja que és molt probable que el punt inicial estigui massa allunyat d'una bona solució local.



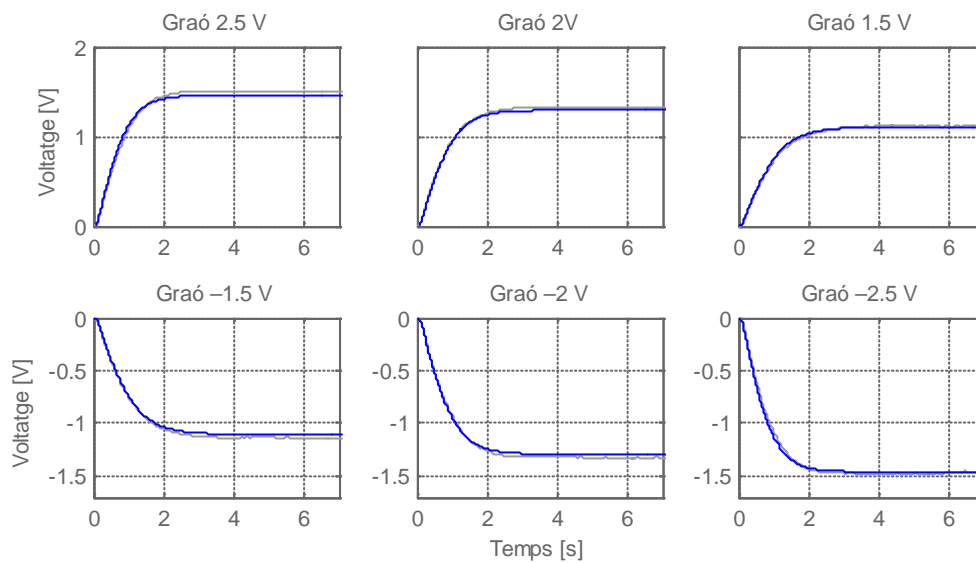
**Figura 4.17** Respostes al graó d'1 V del motor principal i del seu model durant l'elecció del punt inicial

Finalment, aplicant la combinació de tots els graons —solució a l'equació (4.3)—, es procedeix a l'optimització definitiva dels paràmetres  $B_{mr}$ ,  $G_v$ ,  $J_{mr}$ ,  $k_{Lv}$  i  $init_v$  mitjançant el mètode de Levenberg-Marquardt via CETM. Els diferents experiments al laboratori i els resultats obtinguts han fet decantar-nos cap a l'elecció d'aquest mètode i per aquesta combinació de paràmetres, com ocorre en el motor de cua. En només 2 iteracions i 45 minuts, el mètode LM ajusta els paràmetres amb una funció de cost de 33,26 i una  $eqm = 6,05 \cdot 10^{-4}$ , i les característiques dinàmiques del sistema queden captades pel model, tal com es pot veure en la Figura 4.18. Els nous valors que fan això possible són:  $B_{mr} = 0,268 \cdot 10^{-5}$  N·s·m/rad,  $G_v = 16,17$ ,  $J_{mr} = 30,73 \cdot 10^{-5}$  kg·m<sup>2</sup>,  $k_{Lv} = 11,18 \cdot 10^{-7}$  N·m·s<sup>2</sup>/rad<sup>2</sup> i  $init_v = -4,29 \cdot 10^{-4}$  V.

Malgrat que aquests resultats són analíticament millors que els obtinguts en el motor de cua —una funció de cost de 33,26 enfront d'una de 49,06, respectivament—, visualment no dona la mateixa impressió. En concret, els ajustaments en les amplituds més grans (i.e. les respostes als graons de  $\pm 2,5$  V) no són especialment bones en règim permanent atès que, tant les captures com aquestes després del filtratge, contenen massa soroll d'alta freqüència, difícil d'eliminar. Això dona una idea de les no-linealitats presents en aquest motor, especialment a grans amplituds. Tampoc caldria descartar una mala captura per part del tacòmetre per culpa d'algun error físic, i més quan el tacòmetre del rotor de cua ja treballa amb amplituds més grans i ho fa de forma més acurada. No obstant això, aquests resultats són més que

suficients per prosseguir en la construcció d'un model del TRMS, vist que les dues principals característiques dinàmiques del motor —dinàmica/temps de pujada i amplitud en règim permanent— són respectades.

Convé ressaltar que, emprant el mètode de *Pattern search*, encara es poden refinar una mica més els anteriors resultats. Aplicant ara el mètode PS a la combinació d'11 graons, s'obté una minsa millora en la funció de cost —que passa a ser de 31,75. Tanmateix, el temps en realitzar aquests càlculs és excessiu per tanta poca millora: en concret, les 134 iteracions consumeixen el temps d'un dia i mig en completar l'optimització. Malgrat això, es desestimen aquests càlculs per la voluntat d'arribar a un compromís entre temps i millora.



**Figura 4.18** Respostes del motor principal i del seu model al graons de diferent amplitud  
(gris: motor; blau: model)

En resum, en la Taula 4.5 es mostren els valors originals i els identificats dels paràmetres dels models de l'etapa preliminar, del motor principal i el guany del tacòmetre.

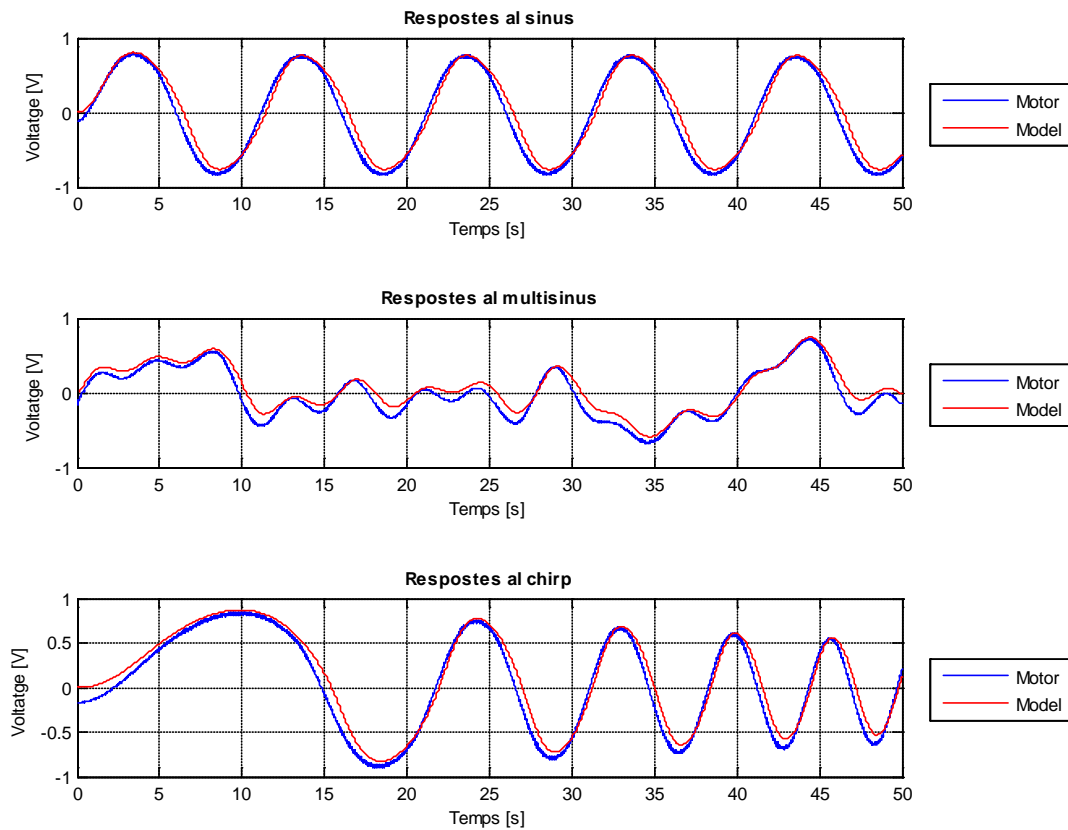
Paràmetre	Valor original	Valor ajustat
$SupV$	+2,5	+2,5
$InfV$	-2,5	-2,5
$init_v$	0.0	<b><math>-4,29 \cdot 10^{-4}</math></b>
$G_v$	8,5	<b>16,17</b>
$R_{av}$	8	8
$L_{av}$	$8,6 \cdot 10^{-4}$	$8,6 \cdot 10^{-4}$
$k_{av}$	0,0202	0,0202
$J_{mr}$	$12,72 \cdot 10^{-5}$	<b><math>30,73 \cdot 10^{-5}</math></b>
$B_{mr}$	$4,5 \cdot 10^{-5}$	<b><math>0,268 \cdot 10^{-5}</math></b>
$k_{Lv}$	$8,7 \cdot 10^{-7}$	<b><math>11,18 \cdot 10^{-7}</math></b>
$G_{rv}$	-	<b><math>5,23 \cdot 10^{-3}</math></b>

**Taula 4.5** Paràmetres del model del motor principal  
i llurs valors originals i ajustats (en negreta)



#### 4.5.5. Validació

Per a la validació del model del motor principal, es capturen les respostes del sistema per a diversos senyals d'entrada que pretenen excitar el sistema de forma suficientment representativa. Aleshores, s'apliquen al motor principal tres senyals diferents: a) un sinus de freqüència 0,1 Hz i amplitud 1 V; b) un multisinus de freqüències 0,2 Hz, 0,25 Hz, 0,36 Hz, 0,4 Hz, 0,45 Hz i 0,6 Hz; i c) un *chirp* d'amplitud 1 V i un escombrat de freqüència lineal de 0,01 Hz a 0,2 Hz en 50 s. En la Figura 4.19 es poden veure les respostes a aquests senyals del motor principal i del model obtingut.



**Figura 4.19** Respostes del motor principal i del seu model a diferents entrades

A simple vista, el model obtingut representa molt bé la dinàmica del motor principal. Quantitativament, alguns dels criteris de validació en cadascun dels casos es mostren en la Taula 4.6.

Entrada	eqm	errn (%)
Sinus	$7,35 \cdot 10^{-3}$	14,83
Multisinus	$8,92 \cdot 10^{-3}$	29,11
Chirp	$8,21 \cdot 10^{-3}$	16,80

**Taula 4.6** Criteris de validació per al motor principal

## 4.6. Conclusions sobre els models dels motors

Ambdós models dels motors ofereixen bons resultats i ajustaments molt precisos com es desprèn dels criteris de validació de la Taula 4.3 i la Taula 4.6. Els models reproduïen les mateixes constants de temps que el sistema i, a més, assolixen pràcticament els mateixos valors en règim permanent que els motors (Figura 4.10 i Figura 4.18). Això assegura un model força fiable, ja que les dues principals característiques dinàmiques del sistema —dinàmica/temps de pujada i amplitud en règim permanent— són respectades. Tanmateix, cal anar amb compte amb els senyals d'entrada que tenen amplituds grans, de l'ordre de  $\pm 2,5$  V. En aquest cas, les estimacions no són especialment bones en règim permanent atès que, tant les captures com aquestes després del filtratge, contenen soroll d'alta freqüència difícil d'eliminar. Això dona una idea de les no-linealitats presents en els motors, especialment a grans amplituds.

De la Figura 4.11 i la Figura 4.19 es dedueix que els models segueixen perfectament les freqüències que oscil·len dins del marge 0–0,6 Hz.

En la següent taula es presenta una comparativa entre els paràmetres dels dos models de motor.

Paràmetre Motor Cua	Valor original	Valor ajustat	Paràmetre Motor Pral	Valor original	Valor ajustat
$SupH$	+2,5	+2,5	$SupV$	+2,5	+2,5
$InfH$	-2,5	-2,5	$InfV$	-2,5	-2,5
$init_h$	-0,0250	<b>-0,0485</b>	$init_v$	0,0	<b><math>-4,29 \cdot 10^{-4}</math></b>
$G_h$	6,5	<b>22,78</b>	$G_v$	8,5	<b>16,17</b>
$R_{ah}$	8	8	$R_{av}$	8	8
$L_{ah}$	$8,6 \cdot 10^{-4}$	$8,6 \cdot 10^{-4}$	$L_{av}$	$8,6 \cdot 10^{-4}$	$8,6 \cdot 10^{-4}$
$k_{ah}$	0,0202	0,0202	$k_{av}$	0,0202	0,0202
$J_{tr}$	$2,48 \cdot 10^{-5}$	<b><math>10 \cdot 10^{-5}</math></b>	$J_{mr}$	$12,72 \cdot 10^{-5}$	<b><math>30,73 \cdot 10^{-5}</math></b>
$B_{tr}$	$2,3 \cdot 10^{-5}$	<b><math>10,01 \cdot 10^{-5}</math></b>	$B_{mr}$	$4,5 \cdot 10^{-5}$	<b><math>0,268 \cdot 10^{-5}</math></b>
$k_{Lh}$	$3,6 \cdot 10^{-7}$	<b><math>3,02 \cdot 10^{-7}</math></b>	$k_{Lv}$	$8,7 \cdot 10^{-7}$	<b><math>11,18 \cdot 10^{-7}</math></b>
$G_{th}$	-	<b><math>5,25 \cdot 10^{-3}</math></b>	$G_{tv}$	-	<b><math>5,23 \cdot 10^{-3}</math></b>

Taula 4.7 Comparativa dels paràmetres d'ambdós motors.

Així a simple vista, quasi tots els paràmetres del motor de cua i del motor principal han efectuat el mateix tipus de canvis, exceptuant  $B_{tr}$  i  $B_{mr}$ , que han tingut evolucions inverses. Noteu també que  $K_{Lv}$  té un valor més gran que  $K_{Lh}$ , la qual cosa és prou realista ja que el fregament aerodinàmic en el motor principal és més gran (té les pales més grans). També  $J_{mr}$  és més gran que  $J_{tr}$ , ja que el motor principal *veu* més inèrcia a superar en el rotor principal que en el de cua (més massa i pales més grans, etc.). Observeu a més que els models dels tacòmetres són pràcticament iguals.

Aleshores, és fefaent que els models dels motors obtinguts són força acurats. Les respostes d'aquests així ho avalen. Tanmateix, cal advertir que el conjunt *etapa preliminar* i *motor* és una unitat indissoluble i que no tenen validesa per separat. Els resultats globals del model estan dintre de l'ordre esperable. Ara bé,

simulacions de valors interns d'aquests models donen valors extravagants i fora de lloc. Per exemple: quan des del SIMULINK s'apliquen 2,5 V al rotor principal, la velocitat que assoleix el rotor a la sortida, segons el model obtingut, és d'uns 275 rad/s. Fins aquí, tot realista. Però és segons aquest mateix model que l'etapa preliminar entrega al motor un voltatge de 58 V en aquestes condicions. Això és impossible, però entra dintre dels cànons de la identificació: com que s'ha realitzat l'optimització conjunta de les dues etapes i considerant només l'entrada i la sortida, qualsevol mesura interna del model pot estar desvirtuada. No obstant això, el model que engloba ambdues etapes funciona a la perfecció.

## 4.7. Identificació estàtica en el pla vertical

Amb el moviment horitzontal bloquejat i els motors apagats —entrades a zero—, es mesura l'evolució de l'angle de capcineig tot *deixant caure* l'estructura del motor principal del TRMS des de diverses altures fins que l'aparell torna a la seva posició de repòs. Aquestes dades permeten ajustar els valors d'alguns paràmetres relatius als moments de gravetat i de fricció en el pla vertical.

### 4.7.1. Equacions, diagrama de blocs i paràmetres a identificar

Les expressions en què es basa la identificació estàtica en el pla vertical s'obtenen a partir de les equacions (3.62) i (3.63) referents al moviment vertical de l'aparell. Com que les entrades als motors són zero, s'assumeix que  $\omega_v = 0$  i  $\omega_h = 0$  malgrat que en realitat no ho siguin —tal com s'explica en els apartats 3.3, 4.4 i 4.5. En efecte, la velocitat de les pales en aquesta situació és tan petita que no afecta a la posició de repòs del TRMS i, per tant, es consideren nul·les la força propulsiva  $f_2(\omega_v)$ , la seva contribució aerodinàmica al model de fricció i la influència del rotor de cua sobre el moviment vertical. A més a més, que el moviment horitzontal estigui bloquejat —i per tant, la velocitat de guinyada ( $\dot{\alpha}_h$ ) sigui zero— implica que els moments de les forces centrífuga i giroscòpica tampoc contribueixen al moviment en aquests experiments.

En resum, aplicant les anteriors simplificacions a les citades equacions, la identificació estàtica en el pla vertical es basa en les expressions següents, el diagrama de blocs SIMULINK de les quals es mostra en la Figura 4.20. En la Taula 4.8 es poden apreciar els valors originals dels paràmetres que serveixen com a punt inicial per al càlcul d'optimització.

$$\frac{dS_v}{dt} = \frac{-b_v \cdot \dot{\alpha}_v - T_c \operatorname{sign}(\dot{\alpha}_v) \left(1 - e^{-|\dot{\alpha}_v|/C_r}\right) + g[(A - B) \cos \alpha_v - C \sin \alpha_v]}{J_v} \quad (4.21)$$

$$\frac{d\alpha_v}{dt} = S_v \quad (4.22)$$

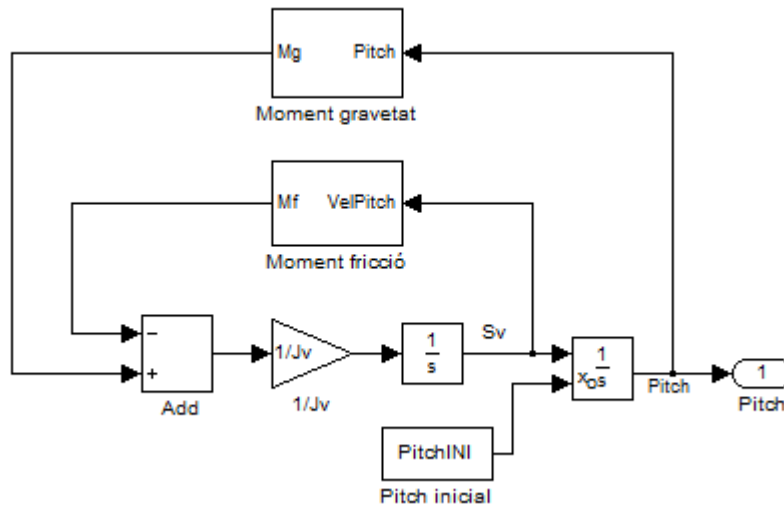


Figura 4.20 Diagrama de blocs SIMULINK per a la identificació estàtica en el pla vertical

Paràmetre	Valor
$A$	0,1042
$B$	0,1168
$C$	0,0201
$b_v$	0,01
$T_c$	-
$Cr$	-
$J_v$	$6,73 \cdot 10^{-2}$

Taula 4.8 Paràmetres i valors inicials en la identificació estàtica en el PV

#### 4.7.2. Temps de mostreig i senyals d'entrada

El temps de mostreig en els presents experiments segueix les recomanacions del manual de l'aparell (Feedback Instruments 2006a) i és de 0,001 s. Per altra banda, les entrades als motors són nul·les i per tant, no hi ha entrades a considerar. Ara bé, cal tenir present que cada captura s'ha realitzat des d'un angle de capcineig diferent i això pot considerar-se com una entrada.

#### 4.7.3. Captura de dades

Es realitzen un total de cinc captures en les que s'actua de la següent manera. Durant els primers vint segons aproximadament i amb l'ajuda d'un nivell, es situa manualment l'helicòpter en la posició de treball per poder calibrar adientment l'aparell és a dir, situar correctament el zero de l'angle de capcineig. A continuació deixa caure el TRMS des d'un angle de capcineig inicial aleatori fins que s'extingeix el senyal i resta en la posició de repòs. De les cinc captures, tres són des d'angles de capcineig superiors al de la posició de repòs, mentre que els dos restants són des d'angles inferiors. El temps total de cada experiment és de 100 s.

#### 4.7.4. Experiments i resultats

En primer lloc, cal realitzar el preprocessament dels senyals capturats per tal d'adequar-los per a l'optimització. A cada senyal capturat se li sostreu el valor de capcineig relatiu a la posició de treball (primers 20–25 s), i tot seguit es retallen temporalment des del punt en què es *deixa caure* fins que passen 70 s (vegeu en Figura 4.21 la comparativa entre la captura d'un dels senyals i el seu posterior processament). Cal insistir en què els codificadors incrementals consideren com a angle origen (que té valor zero) aquell on es troba l'aparell quan s'inicia la simulació —normalment la posició de repòs. Per això és molt important estimar l'angle de capcineig de la posició de repòs per a la resta d'experiments.

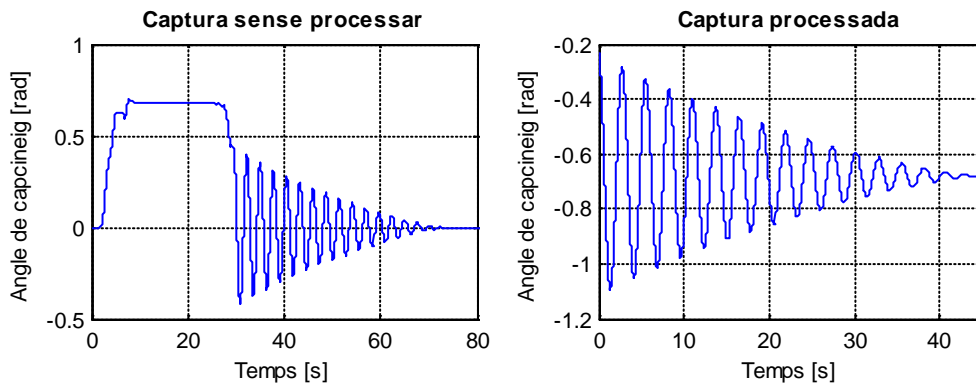


Figura 4.21 Comparativa entre el senyal capturat i el senyal processat

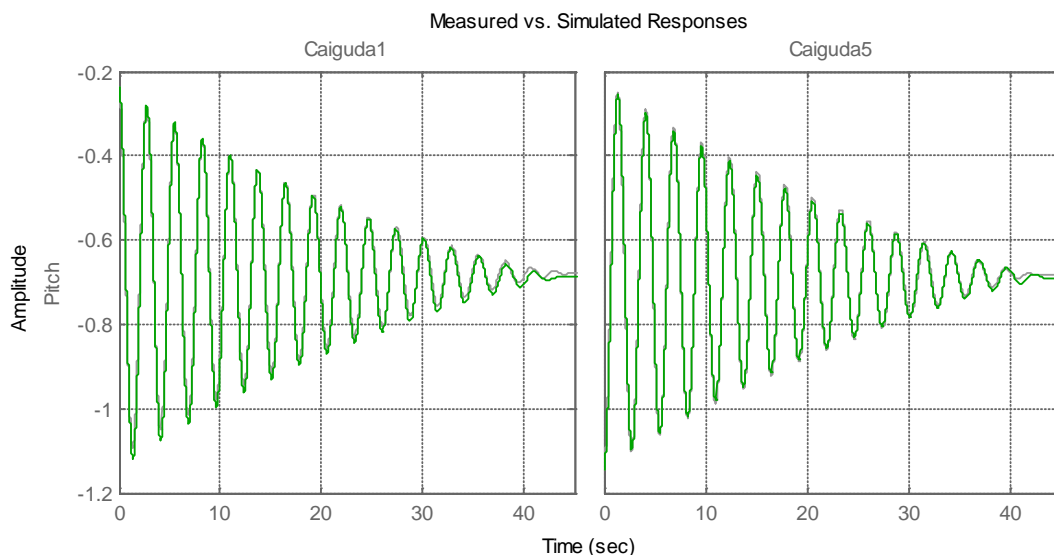
Aleshores, un cop realitzat el processament, a partir dels règims permanents de les captures s'estima un valor per a l'angle de capcineig de repòs mitjançant la mitjana aritmètica. El valor d'aquest angle per a la resta d'experiments és de  $\alpha_{v0} \approx -0,6912$  rad. A partir d'ara, en qualsevol de les captures de l'angle de capcineig es pot optar entre dues maneres: 1) realitzant una sostracció manual de  $-0,6912$  rad en cada captura; o bé 2) afegir directament un sumador a la sortida de cada bloc SIMULINK captador i que es realitzi aquesta tasca directament. En definitiva, un cop adequats els senyals, els angles inicials de cadascuna de les captures són:  $-0,2352$  rad,  $-0,3976$  rad,  $-0,4550$  rad,  $-0,9388$  rad i  $-1,1445$  rad.

El procediment per ajustar els paràmetres d'aquesta part del model, consisteix principalment en tres aproximacions diferents que es detallen a continuació. En la primera aproximació, mitjançant un model més simplificat de fricció —només considerant la viscosa, és a dir, amb  $T_c = 0$ — s'ajusten els valors d' $A$ ,  $B$ ,  $C$  i  $b_v$ . La posició de repòs ve condicionada per les constants  $A$ ,  $B$  i  $C$ , i és per això que cal afinar el seu valor; en canvi, la constant  $b_v$  marca *aproximadament* el decaïment exponencial de l'angle de capcineig fins a la posició de repòs. Considerant les cinc captures, el mètode de Levenberg-Marquardt en 25 iteracions i una funció de cost de 152,78 ( $eqm = 4,36 \cdot 10^{-4}$ ) ajusta els paràmetres a:  $A = 0,1152$ ,  $B = 0,1384$ ,  $C = 0,0282$  i  $b_v = 7,65 \cdot 10^{-3}$ .

En la segona aproximació, a partir del valor obtingut de  $b_v$  es troben uns valors inicials adequats per a la resta de valors del model de fricció ( $T_c$  i  $Cr$ ). Mitjançant el mètode de prova i error es busquen uns valors aproximats de  $T_c$  i  $Cr$  per tal de que la optimització final parteixi des d'un bon valor inicial:  $T_c = 1 \cdot 10^{-3}$  i  $Cr = 0,5$ .

Finalment, en la tercera aproximació, amb el model de fricció complet s'acaben d'ajustar els valors de  $b_v$ ,  $T_c$  i  $Cr$ . El mètode de LM només triga 16 iteracions per ajustar les sortides del model i les captures, amb una funció de cost de 41,07 ( $eqm = 1,17 \cdot 10^{-4}$ ), i oferir els següents valors:  $b_v = 3,12 \cdot 10^{-3}$ ,  $T_c = 1,48 \cdot 10^{-3}$  i  $Cr = 7,73 \cdot 10^{-3}$ .

Observeu en la Figura 4.22 l'ajustament entre algunes de les captures i les corresponents sortides del model i, en la Taula 4.9, els valors originals i els paràmetres identificats d'aquesta part del model.



**Figura 4.22** Respostes del TRMS (en gris) i del model (en verd) des de diferents angles de capcineig inicials: a)  $-0,2352$  rad ;b)  $-1,1445$  rad

Paràmetre	Valor original	Valor ajustat
$A$	0,1042	<b>0,1152</b>
$B$	0,1168	<b>0,1384</b>
$C$	0,0201	<b>0,0282</b>
$b_v$	0,01	<b><math>3,12 \cdot 10^{-3}</math></b>
$T_c$	—	<b><math>1,48 \cdot 10^{-3}</math></b>
$Creep$	—	<b><math>7,73 \cdot 10^{-3}</math></b>
$J_v$	$6,73 \cdot 10^{-2}$	$6,73 \cdot 10^{-2}$
$\alpha_{v0}$	—	$-0,6912$

**Taula 4.9** Paràmetres del model (estàtica pla vertical) i llurs valors originals i ajustats (en negreta)

## 4.8. Identificació dinàmica directa en el pla vertical

Amb el moviment horitzontal bloquejat, s'excita el motor principal i es mesura l'angle de capcineig. D'aquesta manera, s'intenta modelitzar la influència directa del motor principal sobre el moviment vertical.

### 4.8.1. Equacions, diagrama de blocs i paràmetres a identificar

Novament, les equacions en què es basa la identificació directa en el pla vertical s'obtenen a partir de les equacions (3.62) i (3.63), referents al moviment vertical de l'aparell. A diferència de la identificació estàtica en el PV, ara aquí sí que es considera la força propulsiva del motor principal  $f_2(\omega_v)$ . D'igual manera però, els moments de les forces centrífuga i giroscòpica tampoc contribueixen al moviment en aquests experiments. Aleshores, a més de les equacions (3.60) i (3.61) que governen l'etapa preliminar i el motor principal, les equacions simplifiades dels presents experiments són:

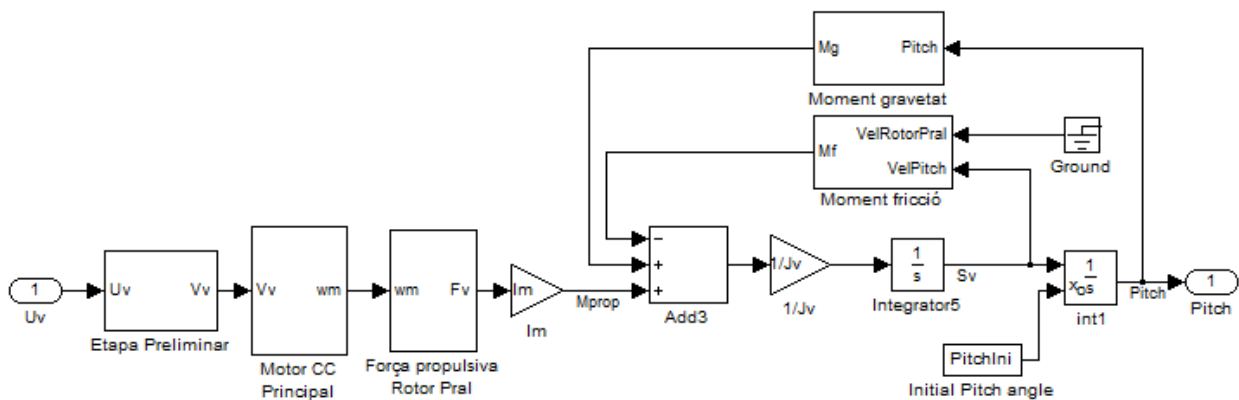
$$\frac{dS_v}{dt} = \frac{l_m f_2(\omega_v) - (\beta_v |\omega_v| + b_v) \dot{\alpha}_v - T_c \text{sign}(\dot{\alpha}_v) \left(1 - e^{-(|\dot{\alpha}_v|/Cr)}\right) + g[(A - B) \cos \alpha_v - C \sin \alpha_v]}{J_v} \quad (4.23)$$

$$\frac{d\alpha_v}{dt} = S_v \quad (4.24)$$

on

$$f_2(\omega_v) = \begin{cases} k_{fvp} \cdot |\omega_v| \cdot \omega_v & \text{si } \omega_v \geq 0 \\ k_{fvn} \cdot |\omega_v| \cdot \omega_v & \text{si } \omega_v < 0 \end{cases}$$

Vegeu en la següent figura el diagrama de blocs SIMULINK amb què s'han realitzat els experiments, construït a partir de les equacions anteriors.



**Figura 4.23** Diagrama de blocs SIMULINK per a la identificació dinàmica directa en el pla vertical

La influència del motor principal en el moviment vertical queda marcada pels paràmetres  $k_{fvp}$  i  $k_{fvm}$ , així com també però en menor mesura,  $\beta_v$ . En la Taula 4.10 es poden apreciar els valors originals d'aquests paràmetres que serveixen com a punt inicial per al càlcul d'optimització. Aquests valors són extrets de Rahideh i Shaheed (2007), tot i que s'ha optat per reduir de  $1.62 \cdot 10^{-5}$  fins a  $1.50 \cdot 10^{-5}$  el valor del paràmetre  $k_{fvp}$  degut a la inestabilitat que ofereix el model per entrades de gran amplitud.

Paràmetre	Valor
$k_{fvp}$	$1,50 \cdot 10^{-5}$
$k_{fvm}$	$1,08 \cdot 10^{-5}$
$\beta_v$	—

**Taula 4.10** Paràmetres i valors inicials  
de la identificació dinàmica directa en el PV

#### 4.8.2. Temps de mostreig i senyals d'entrada

El temps de mostreig en els experiments presents segueix les recomanacions del manual de l'aparell (Feedback Instruments 2006a) i té un valor de 0,001 s. Per altra banda, després d'experimentar amb diferents senyals d'entrada i veure quin aporta més informació sobre el sistema, finalment s'opta per utilitzar una combinació de graons de diferents amplituds dins del marge d'operació del TRMS ( $\pm 2,5$  V).

#### 4.8.3. Captura de dades

Mentre el motor principal és excitat, es realitzen un total d'onze captures de l'angle de capcineig. Cada captura consisteix en la resposta a un graó de durada 100 s. Les diferents amplituds considerades per als graons d'entrada són:  $\pm 0,5$  V,  $\pm 1$  V,  $\pm 1,5$  V,  $\pm 2$  V,  $\pm 2,5$  V i, a més,  $-1,75$  V i  $-2,25$  V. Les respostes a aquestes dues darreres entrades es justifiquen per la inestabilitat que ofereix el sistema quan s'excita a grans amplituds negatives, a fi d'obtenir informació més detallada en aquests marges d'actuació.

Com s'apunta en l'apartat 3.1.1, el ventall d'actuació del TRMS en el pla vertical està limitat físicament. Això afecta en certa manera a algunes de les respostes capturades. El cas més limitant, que es produeix en l'angle de capcineig inferior, aproximadament de  $-1.18$  rad, afecta als transitoris de les respostes als graons de  $-1,75$  V,  $-2$  V,  $-2,25$  V i  $-2,5$  V, que es veuen escapçats implacablement per aquesta limitació física (vegeu la Figura 4.24b). Tanmateix, els règims permanents dels casos  $-1,75$  V i  $-2$  V queden dintre del marge d'actuació del TRMS, mentre que en els dos restants l'aparell queda fixat en la posició màxima, la qual cosa ens aporta ben poca informació i implica la seva desestimació per al càlcul dels paràmetres. Per contra, en les respostes als graons positius només la del graó de  $+2,5$  V veu afectat mínimament el seu règim transitori, ja que el límit superior de capcineig ( $+1,18$  rad) ofereix més recorregut des de la posició de repòs (Figura 4.13a). Per això, aquestes dades sí que s'utilitzen per a l'optimització de paràmetres.



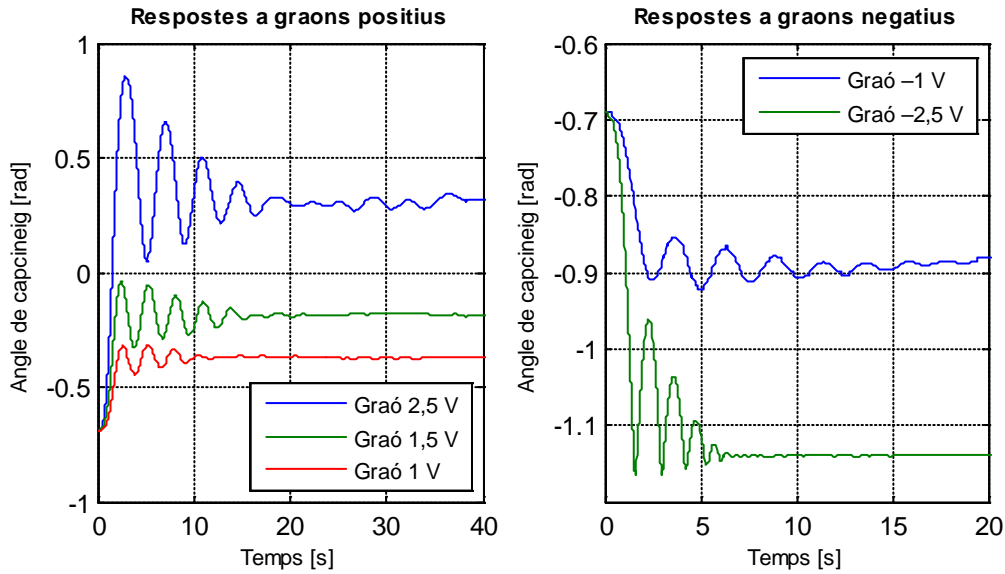


Figura 4.24 Respostes del TRMS als graons per a la identificació vertical directa

#### 4.8.4. Experiments i resultats

Abans de tot, es realitza el processament de les captures de l'angle de capcineig, a les quals es sostreu el valor teòric de l'angle de capcineig que s'ha convingut en l'apartat anterior (0,6912 rad) per tal de tenir les dades en el sistema de coordenades real.

Aleshores, en primer lloc, es pretén aproximar polinòmicament el bloc de la força propulsiva del rotor principal que apareix en la Figura 4.23 —o en altres paraules, ajustar els valors de les constants  $k_{fvp}$  i  $k_{fvm}$  de la funció  $f_2(\omega_v)$ . Per fer-ho, cal trobar a partir de les captures (que relacionen volts d'entrada amb radians de sortida) una relació entre l'entrada a aquest bloc (velocitat angular de les pales del motor principal,  $\omega_v$ ) i la seva sortida ( $f_2(\omega_v)$ , força propulsiva).

Per obtenir les dades de l'entrada del bloc, s'apliquen les mateixes entrades de la captura (els graons) al model de l'etapa preliminar i del motor principal vist en l'apartat 4.5, a fi de saber quina velocitat de gir correspon en règim permanent a cada graó d'entrada.

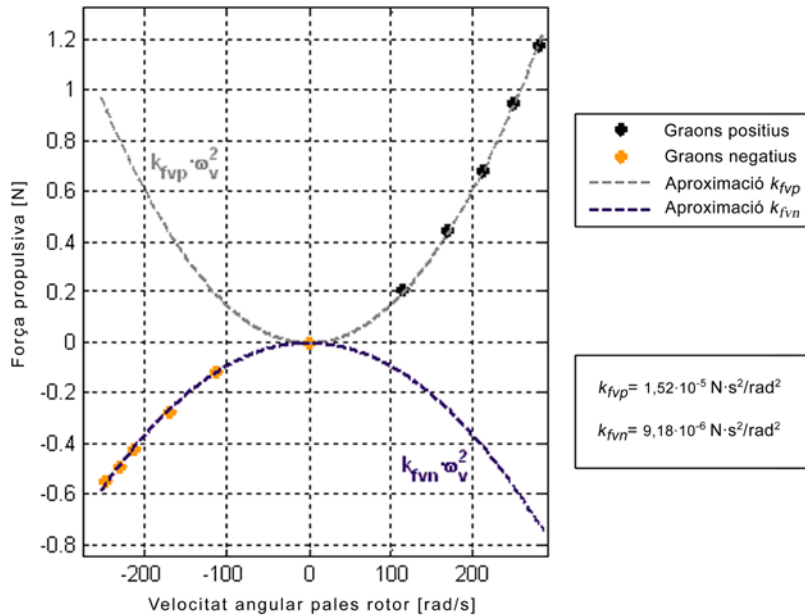
Per a la sortida del bloc, es considera que, estant el sistema en règim permanent, les sortides s'estabilitzen pràcticament en un valor de forma constant i les derivades tendeixen a zero ( $d/dt \rightarrow 0$ ). Aplicant aquests criteris a l'equació (4.23), s'obté el següent desenvolupament per a la força propulsiva:

$$0 = \frac{l_m f_2(\omega_v) + g[(A - B) \cos \alpha_v - C \sin \alpha_v]}{J_v}$$

$$f_2(\omega_v^\infty) = -\frac{g}{l_m}[(A-B)\cos\alpha_v - C\sin\alpha_v] \quad (4.25)$$

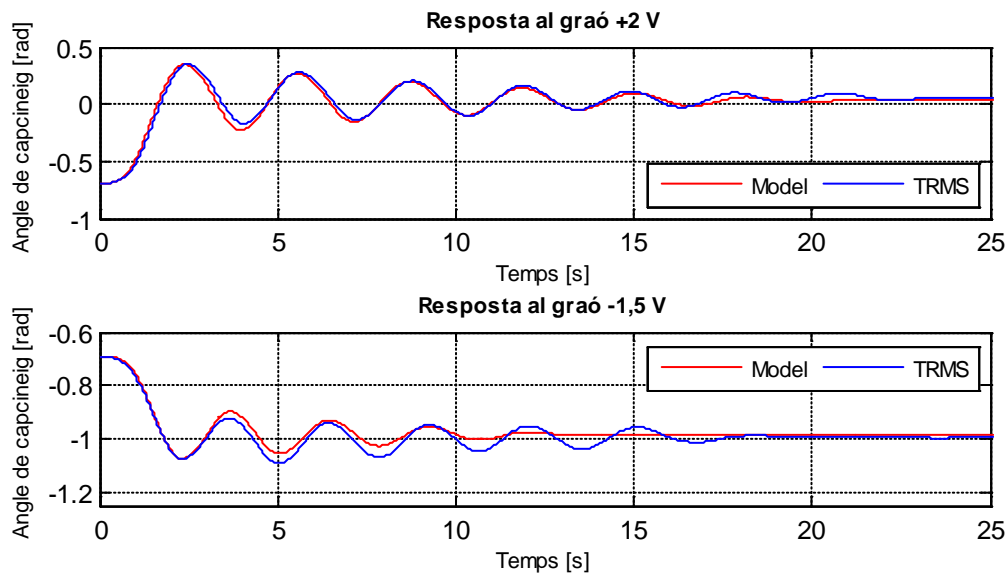
Noteu com  $\tau_{fv}$  també és zero en règim permanent ja que depèn directament de la velocitat de capcineig ( $\dot{\alpha}_v$ ), és a dir, d'una derivada. Aleshores, l'equació (4.25) permet disposar dels diferents valors en règim permanent de la força propulsiva a partir del règim permanent de cada captura dels angles de capcineig.

Un cop *transformades* les dades capturades en dades d'entrada al bloc de força propulsiva (velocitats angulars de les pales en règim permanent) i en dades de sortida del bloc (força propulsiva en règim permanent), es procedeix a relacionar-les mitjançant un polinomi de segon grau (Rahideh i Shaheed 2007, 2008a). Per aconseguir-ho, s'utilitza el *Curve Fitting Toolbox* 1.1.4, un conjunt d'eines de MathWorks (2005b) per a MATLAB 7.1, que optimitza el resultat en un sentit de mínims quadrats. Per als graons positius, on s'utilitzen totes les captures i el valor de zero per a l'entrada zero, el polinomi de segon grau òptim que s'ajusta a tots els punts amb un *eqm* de  $7,1 \cdot 10^{-4}$  té un coeficient de  $k_{fvp} = 1,52 \cdot 10^{-5}$  (vegeu la Figura 4.25). En canvi, per als graons negatius només es consideren els conjunts de punts relatius als graons  $-0,5$  V,  $-1$  V,  $-1,5$  V,  $-1,75$  V i  $-2$  V, així com el valor de zero per a l'entrada zero. Cal recordar que les dades referents als graons  $-2,25$  V i  $-2,5$  V no contenen informació rellevant en règim permanent ja que la sortida —l'angle de capcineig— es veu afectat per la limitació física del propi TRMS. Amb tot, el paràmetre  $k_{fvn}$  que optimitza les dades té un valor de  $9,18 \cdot 10^{-6}$  amb un *eqm* de  $7,1 \cdot 10^{-4}$  (Figura 4.25).



**Figura 4.25** Ajustament polinòmic dels paràmetres  $k_{fvp}$  i  $k_{fvn}$  per mínims quadrats

Finalment, s'ajusta en règim permanent el valor del paràmetre  $\beta_v$  que influeix en el moment de fricció total quan les pales del rotor giren. En primer lloc, per tal d'aproximar-nos el més possible a la solució s'elegeix un valor inicial per al paràmetre amb el mètode de prova i error, que ascendeix a  $\beta_v = 5 \cdot 10^{-5}$ . Aleshores, mitjançant el CETM s'aplica el mètode de Levenberg-Marquardt al conjunt de captures originals —les que relacionen volts i radians. Ara però, cal cenyir-se exclusivament en el règim transitori, en concret en els primers 10 s, ja que el règim permanent ja es pot considerar identificat. Tanmateix, s'aplica el mètode LM només a les respostes que no es veuen afectades per les limitacions físiques del TRMS —les dels graons +2,5 V, +2 V,  $\pm 1,5$  V,  $\pm 1$  V i  $\pm 0,5$  V— i, en 11 iteracions, s'obté un valor de  $\beta_v = 2,82 \cdot 10^{-5}$  amb una funció de cost de 154,77 ( $eqm = 1,93 \cdot 10^{-3}$ ). En la Figura 4.26 es pot observar com s'ajusta la sortida del model a dues de les captures realitzades per aquests experiments i en la Taula 4.11, els resultats de l'optimització.



**Figura 4.26** Respostes del TRMS i del model en la identificació dinàmica directa en el PV (dades d'entrenament)

Paràmetre	Valor original	Valor ajustat
$k_{fvp}$	$1,50 \cdot 10^{-5}$	$1,52 \cdot 10^{-5}$
$k_{fvpn}$	$1,08 \cdot 10^{-5}$	$9,18 \cdot 10^{-6}$
$\beta_v$	$5 \cdot 10^{-5}$	$2,82 \cdot 10^{-5}$

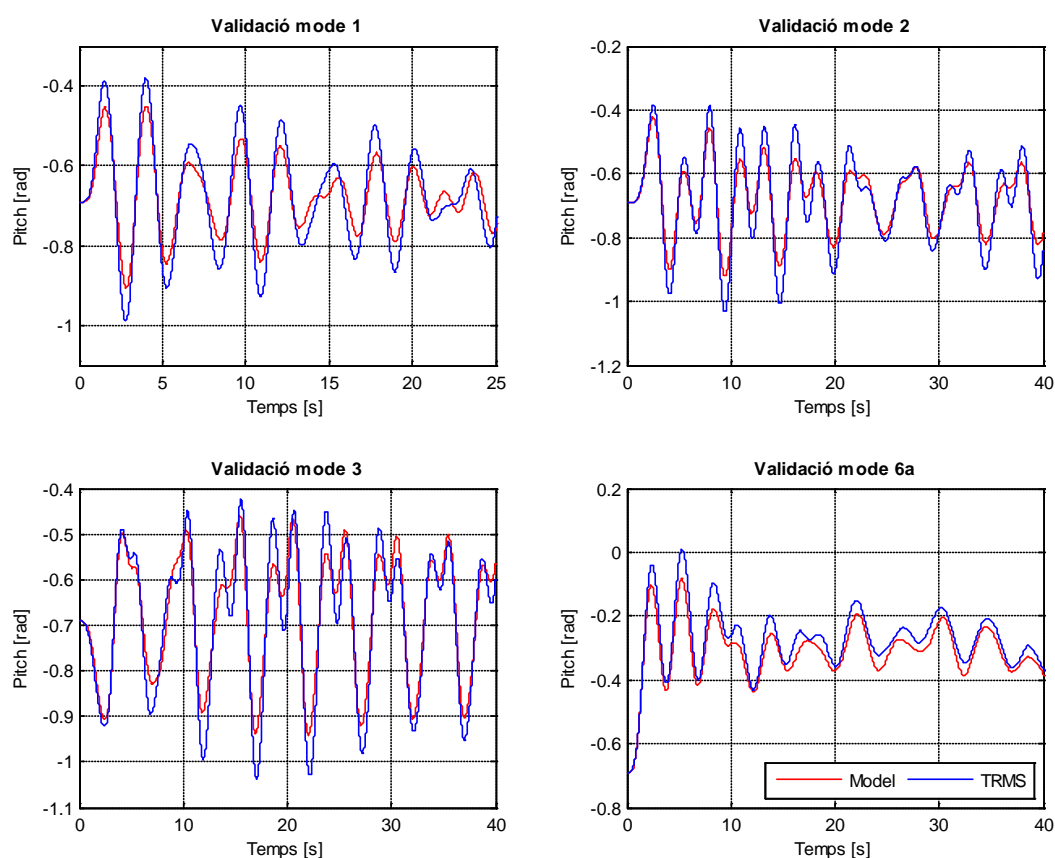
**Taula 4.11** Paràmetres del model (directa pla vertical) i llurs valors originals i ajustats

#### 4.8.5. Validació

Per a la validació es comparen les respostes del sistema i del model a les mateixes entrades. En aquest experiment s'ha excitat el motor principal amb els següents modes:

- Mode 1: Sinus de freqüència 0,5 Hz i amplitud 2 V durant 60 s.
- Mode 2: Sinus de freqüència 0,2 Hz i amplitud 1 V durant 40 s.
- Mode 3: Senyal quadrat de freqüència 0,2 Hz i amplitud 1 V durant 40 s.
- Mode 6a: Multisinus de freqüències 0,4 Hz, 0,42 Hz, 0,5 Hz i 0,6 Hz durant 50 s.

Val la pena recordar que el moviment horitzontal continua bloquejat i que l'entrada al motor de cua és zero. En la Figura 4.27 es pot veure la comparativa entre els senyals capturats i la sortida del model. A simple vista, el model obtingut representa força bé la dinàmica en el pla vertical. Quantitativament, alguns dels criteris de validació en cadascun dels casos es mostren en la Taula 4.12.



**Figura 4.27** Comparativa entre les respostes del TRMS i les del model per a la identificació dinàmica directa en el PV (dades de validació)

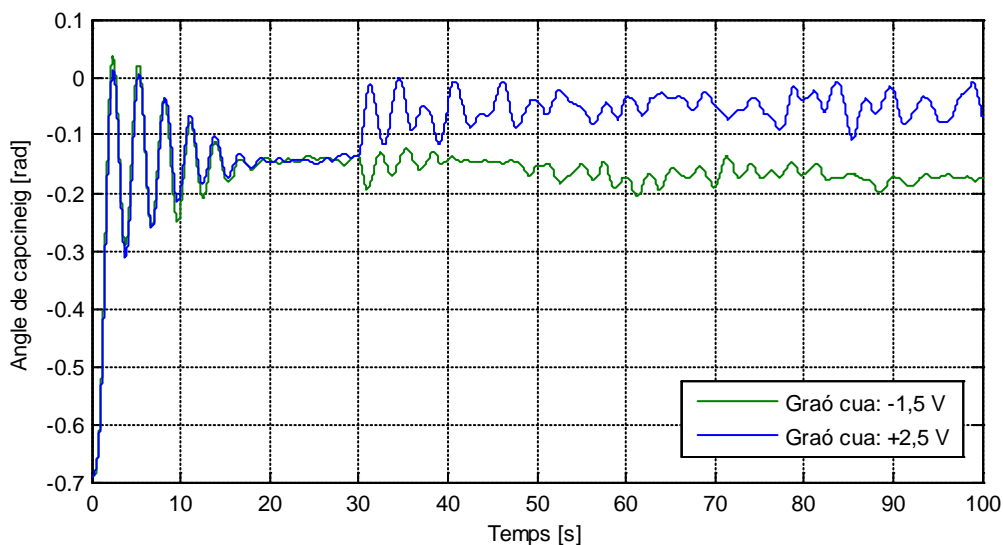
Entrada	eqm	errn (%)
Mode 1	$1,35 \cdot 10^{-3}$	5,34
Mode 2	$2,37 \cdot 10^{-3}$	6,97
Mode 3	$2,17 \cdot 10^{-3}$	6,58
Mode 6a	$1,52 \cdot 10^{-3}$	13,54

**Taula 4.12** Criteris de validació de la identificació dinàmica directa en el pla vertical

#### 4.9. Identificació dinàmica creuada en el pla vertical

Amb el moviment horitzontal bloquejat i des d'una posició del TRMS en règim permanent, s'excita el motor de cua i es mesura com evoluciona l'angle de capcineig. D'aquesta manera, s'intenta modelitzar la influència que té el motor de cua sobre el moviment vertical.

Per fer-se una idea d'aquesta influència, observeu la Figura 4.28. En ella s'aprecien les respostes del TRMS quan s'excita el motor de cua amb dos graons d'amplitud  $+2,5$  V i  $-1,5$  V. Inicialment, l'helicòpter es troba en repòs i té el seu moviment horitzontal bloquejat —només es pot moure verticalment. En  $t = 0$  s el motor de cua està apagat i s'aplica al motor principal un graó d'amplitud  $1,5$  V. Llavors, l'aparell arriba a un règim transitori força definit entre els segons 20 i 30. Tot seguit, en  $t = 30$  s s'excita el rotor de cua mitjançant un altre graó. La resposta a aquest graó (en la figura, de color blau la del graó d'amplitud  $+2,5$  V; i de color verd, la del de  $-1,5$  V) arriba a un règim permanent excessivament aleatori i inestable. També s'observa en el propi aparell com, en aquesta situació, el moviment vertical és molt sensible a qualsevol pertorbació aerodinàmica: les condicions de contorn, com ara parets i objectes al voltant, també hi influeixen. L'amplitud no constant de les oscil·lacions a partir de  $t = 40$  s denota que es tracta de soroll de procés.



**Figura 4.28** Influència del rotor de cua sobre el moviment vertical

Ara bé, s'opta per modelitzar aquesta influència com un simple guany —linealment amb la velocitat del rotor de cua. Tanmateix, aquest model és massa senzill per recollir tota la dinàmica present, que depèn, entre d'altres causes, de la velocitat del rotor de cua i de la posició de capcineig que tingui l'aparell. Pel què s'observa en el laboratori, no és el mateix quan l'helicòpter està totalment en repòs que quan es troba en la posició de treball, on l'aparell és més sensible a qualsevol pertorbació; tampoc és el mateix que

l'helicòpter tingui objectes i parets al seu voltant, que accentuen les corrents d'aire al seu voltant. Per això, les captures realitzades són força inestables i, a causa de les fluctuacions i turbulències d'aire al voltant de l'aparell, és difícil d'arribar un règim permanent estable.

#### 4.9.1. Equacions, diagrama de blocs i paràmetres a identificar

Les equacions (3.62) i (3.63) són en les quals es basa aquesta etapa d'identificació. En elles, però, cal tenir en compte les simplificacions adequades al disseny de l'experiment. En primer lloc, el motor principal es considera apagat, és a dir, que  $f_2(\omega_v) \approx 0$  per motius de senzillesa —el guany a modelitzar és tan simple que no cal entrar en detalls sobre l'angle de capcineig inicial. D'igual manera, els moments de les forces centrífuga i giroscòpica tampoc contribueixen al moviment en aquests experiments ja que el moviment horitzontal està bloquejat. Aleshores, a més de les equacions (3.64) i (3.65) que governen l'etapa preliminar i el motor de cua, les equacions adequades per a aquests experiments són:

$$\frac{dS_v}{dt} = \frac{-b_v \dot{\alpha}_v - T_c \text{sign}(\dot{\alpha}_v) \left(1 - e^{-|\dot{\alpha}_v|/Cr}\right) + g[(A - B) \cos \alpha_v - C \sin \alpha_v] + J_{rt} \omega_h}{J_v} \quad (4.26)$$

$$\frac{d\alpha_v}{dt} = S_v \quad (4.27)$$

En la següent figura es mostra el diagrama de blocs SIMULINK amb què s'han realitzat els experiments, i que ha estat construït a partir de les anteriors equacions. El valor de  $J_{rt}$  a partir del qual s'ha realitzat tot el procés és  $4,2631 \cdot 10^{-5}$ .

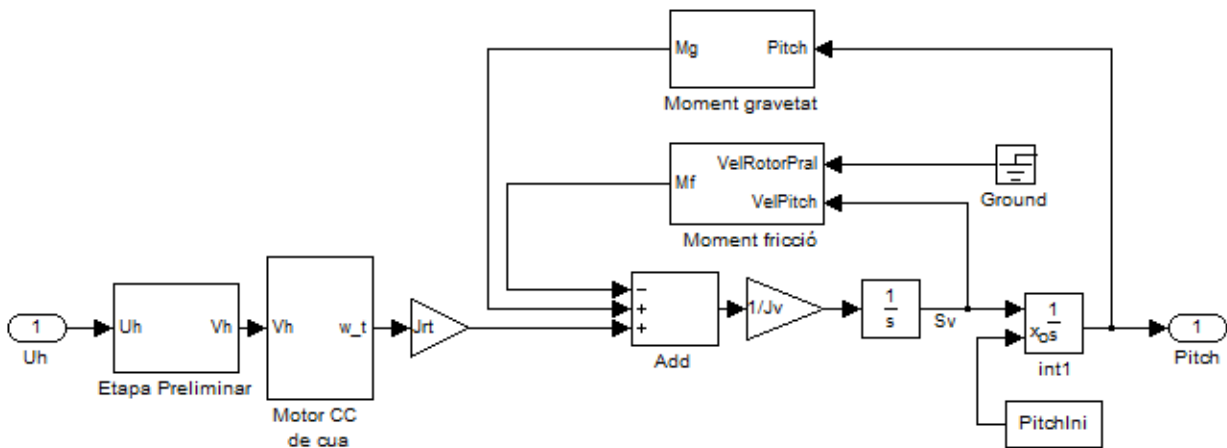


Figura 4.29 Diagrama de blocs SIMULINK per a la identificació dinàmica creuada en el pla vertical

#### 4.9.2. Temps de mostreig i senyals d'entrada

El temps de mostreig en els experiments presents segueix les recomanacions del manual de l'aparell (Feedback Instruments 2006a) i té un valor de 0,001 s. Per altra banda, després d'experimentar amb

diferents senyals d'entrada i veure quin aporta més informació sobre el sistema, finalment s'opta per utilitzar una combinació de graons de diferents amplituds dins del marge d'operació del TRMS ( $\pm 2,5$  V).

#### 4.9.3. Captura de dades

Es realitzen nombroses captures per veure de quina manera afecta la influència del rotor de cua sobre el moviment vertical. Amb l'helicòpter en diferents posicions de capcineig en règim estacionari, s'excita el rotor de cua a través de graons de diferents amplituds. Finalment, a causa de l'excessiva inestabilitat del sistema quan el rotor de cua s'activa —i especialment quan el TRMS està lluny de la posició de repòs— i que el guany  $J_r$  tampoc és capaç de recollir tota aquesta dinàmica, s'opta per utilitzar exclusivament les captures següents: amb el rotor principal apagat i el TRMS en la posició de repòs, s'excita el rotor de cua amb graons d'amplitud  $\pm 0,5$  V,  $\pm 1$  V,  $\pm 1,5$  V,  $\pm 2$  V i  $\pm 2,5$  V. Aquestes dades són suficients per aproximar una influència mitjanament acurada.

#### 4.9.4. Experiments i resultats

En primer lloc, es realitza el processament de les captures, a les quals es suma el valor convingut de l'angle de capcineig ( $-0,6912$  rad) a fi de disposar de les dades en l'ordre de magnitud real. Amb aquestes dades es vol aproximar linealment la influència del rotor de cua sobre el moviment vertical a través de l'ajustament del paràmetre  $J_r$ . Per fer-ho, cal trobar a partir de les captures una relació entre l'entrada a aquest guany (velocitat angular de les pales del rotor de cua,  $\omega_h$ ) i la seva sortida en règim permanent.

Per obtenir les dades de l'entrada al bloc, s'apliquen les mateixes entrades de la captura (els graons) al model de l'etapa preliminar i del motor de cua vist en l'apartat 4.4, a fi de saber quina velocitat de gir correspon en règim permanent a cada graó d'entrada.

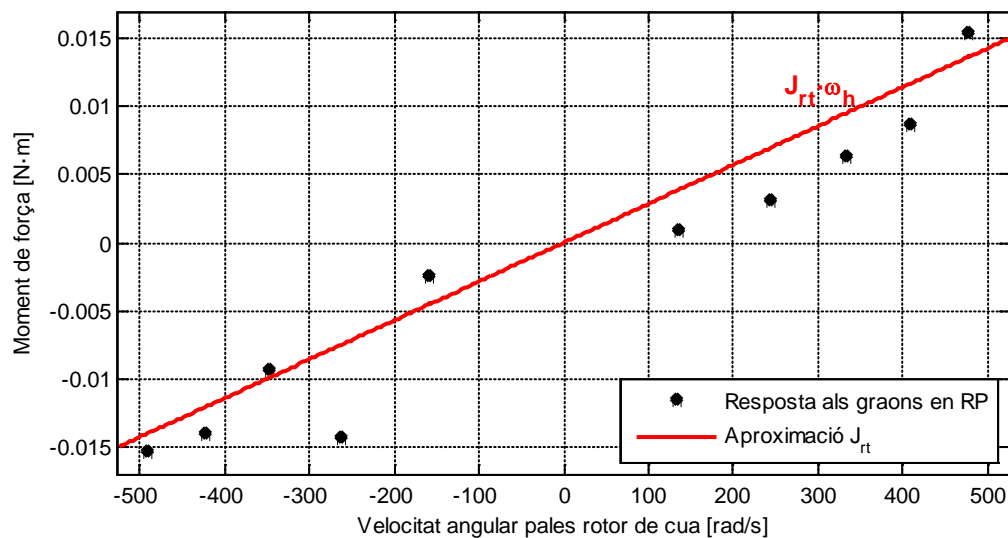
Per a la sortida del bloc, es considera que, estant el sistema en règim permanent, les sortides s'estabilitzen pràcticament en un valor constant i les derivades tendeixen a zero ( $d/dt \rightarrow 0$ ). Aplicant aquests criteris a l'equació (4.26), s'obté el següent desenvolupament per al moment del rotor de cua:

$$0 = \frac{g[(A - B) \cos \alpha_v - C \sin \alpha_v] + J_r \omega_h}{J_v}$$

$$\tau_{ic} = J_r \omega_h = -g[(A - B) \cos \alpha_v - C \sin \alpha_v] \quad (4.28)$$

Noteu com  $\tau_{fv}$  també és zero en règim permanent ja que depèn directament de la velocitat de capcineig ( $\dot{\alpha}_v$ ), és a dir, d'una derivada. Aleshores, l'equació (4.28) permet disposar dels diferents valors del moment del rotor de cua a partir del règim permanent dels angles de capcineig de cada captura.

Un cop adequades les dades capturades en dades d'entrada al guany (velocitats angulars de les pales en règim permanent) i en dades de sortida del guany (moment de força en règim permanent), es procedeix a relacionar els seus valors en règim permanent (mitjana de les últimes mostres) mitjançant un polinomi de primer grau. Per aconseguir-ho, s'utilitza el *Curve Fitting Toolbox* 1.1.4. A la vista de la situació dels punts en la Figura 4.30, on es mostra l'ajustament, s'optimitza amb tots els punts excloent les captures referents als graons +2,5 V i -1 V. Aquestes darreres es poden considerar com a males captures —o *outliers*— i no aporten informació alguna (o fins i tot, distorsionarien l'estimació). La recta s'ajusta amb un *eqm* d' $1 \cdot 10^{-4}$  el valor de  $J_{rt}$  en  $2,86 \cdot 10^{-5}$ .



**Figura 4.30** Ajustament polinòmic del paràmetre  $J_{rt}$  per mínims quadrats

Vist el resultat, analíticament queda palès que el motor de cua no té una gran influència en el moviment vertical; això sí, és un element distorsionador que aporta variabilitat principalment en el règim permanent: a causa de les turbulències d'aire mai queda en una posició totalment estable. Aquesta influència, tot i ser una font d'inestabilitat, no és gaire important. Una mostra d'això la trobem en Nejari *et al.* (2011a), on ignoren aquest efecte i l'aproximen directament a zero; en canvi, per a Rahideh i Shahhed (2007) té un valor similar al d'aquest projecte,  $2,6 \cdot 10^{-5} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ .

Una possible millora passaria per un model més complet on, a banda del guany, un bloc de segon ordre podria afegir petites pertorbacions. A més, segurament també s'hi hauria de contemplar una dependència amb l'angle de capcineig.

En la Figura 4.31 es comparen algunes de les respostes simulades amb els paràmetres obtinguts amb les dades capturades per a l'optimització. Noteu que no es tracta d'un model acurat ja que amb l'ajustament d'un sol guany és impossible captar tota la dinàmica existent. Tanmateix, a grans trets actua com ha d'actuar segons la conservació del moment angular, i en la mesura més a o menys adequada.



Noteu en la figura com el model *tarda* en reaccionar i té una constant de temps més gran que la del sistema, ja que captura bé la freqüència, però no el desfasament. Això denota que el model del moment de força del motor de cua és millorable, i que segurament li falta algun element per tal que *reaccioni* a temps. Tanmateix, en règim permanent s'obté un bon resultat ja que el model capta bé de mitjana la *potència* que el rotor de cua injecta al sistema. Així mateix, adoneu-vos que, amb un sol guany, és impossible ajustar-se a la dinàmica aleatòria del sistema, per exemple, en la resposta al graó  $-2,5$  V.

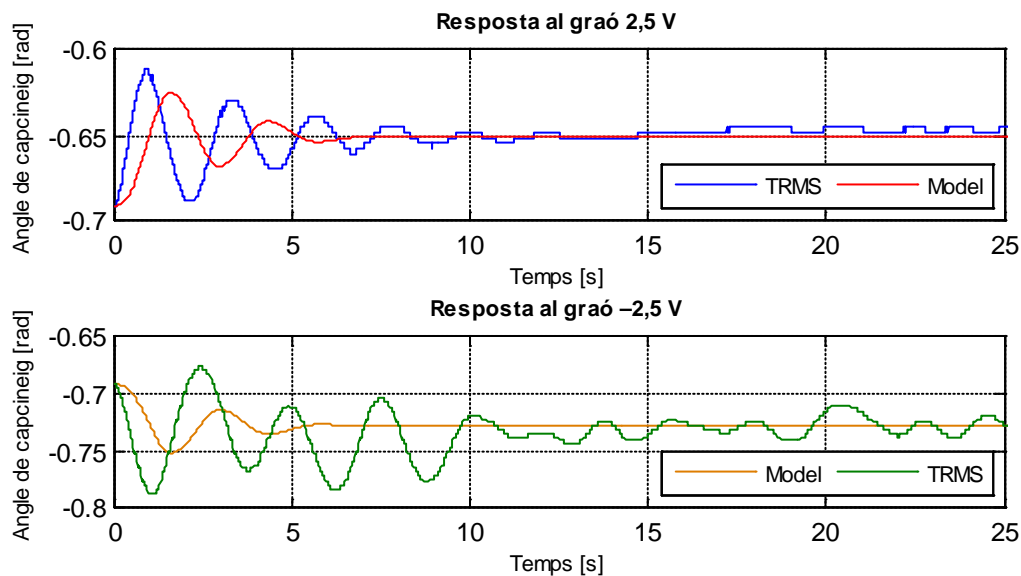


Figura 4.31 Respostes del TRMS i del model en la identificació vertical creuada

Paràmetre	Valor original	Valor ajustat
$J_{\pi}$	$4,26 \cdot 10^{-5}$	$2,86 \cdot 10^{-5}$

Taula 4.13 Paràmetres del model (dinàmica creuada vertical)  
i llurs valors originals i ajustats

#### 4.10. Conclusions sobre la identificació en el pla vertical

Els resultats de la modelització del moviment en el pla vertical són fruit en gran part de la precisa modelització del moment de la gravetat i del model de fricció de Balderud (2002). Gràcies a ells, s'obté una bona aproximació del moment de la força propulsiva del rotor principal. El model obtingut cospa bé la influència que el rotor principal té sobre el moviment vertical dintre del marge de freqüències 0–0,6 Hz, tant en el règim transitori com en el permanent (Figura 4.27).

No obstant això, la influència del motor de cua sobre el moviment vertical no queda determinada amb tanta precisió atès que el model triat és massa simple per recollir tota la dinàmica present. Si es volgués

ser més precís, no només caldria tenir en compte la velocitat del rotor de cua, sinó també la posició de capcineig que té l'aparell en cada moment. Per fer-ho, caldria fer un estudi exhaustiu del rerefons físic per tal de demostrar analíticament en què es sustenta aquesta influència. Noteu que el fet de modelitzar-la linealment amb la velocitat del rotor no s'ajusta del tot a la realitat, almenys en règim transitori (Figura 4.31). El model no cospa la constant de temps del sistema, essent la aquest darrer molt més ràpida. En altres paraules, un guany, entès com a model, només ens garanteix un valor ajustat en règim permanent, però no transitori satisfactori. Tanmateix, els treballs en el laboratori indiquen que és més realista aquest model, que no el suggerit per Rahideh i Shaheed (2007, 2008a) on la influència no és un moment de força, sinó una velocitat angular. Malgrat tot, com que aquesta influència és pràcticament menyspreable, aquesta modelització no té un paper important en el comportament global.

#### 4.11. Identificació estàtica en el pla horitzontal

Amb el moviment vertical bloquejat en una posició fixa i els motors apagats —entrades a zero—, es mesura l'evolució de l'angle de guinyada quan es *deixa anar* lliurement l'estructura del TRMS des de d'un angle inicial de guinyada diferent al de repòs, fins que l'aparell resta en una posició estàtica, que no acostuma a ser mai la mateixa.

##### 4.11.1. Equacions, diagrama de blocs i paràmetres a identificar

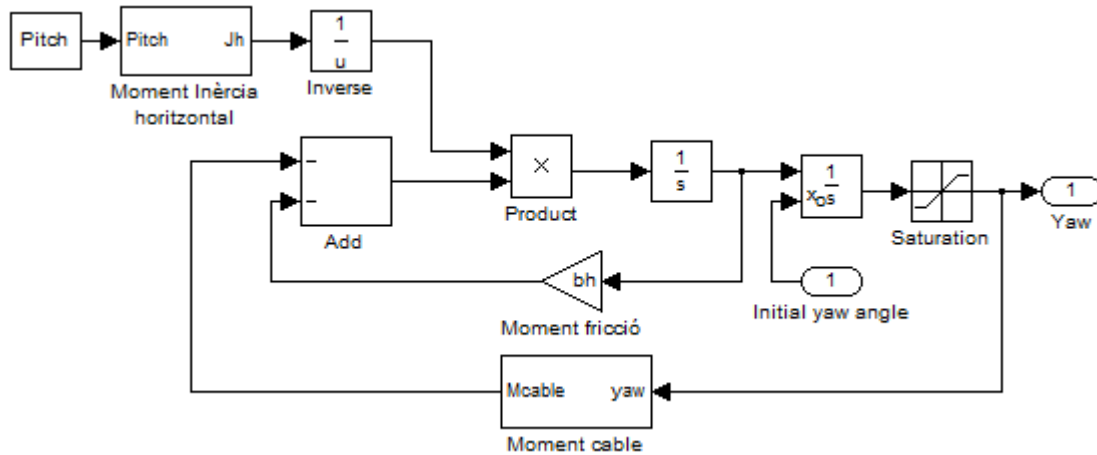
Les equacions en què es basa la identificació estàtica en el pla horitzontal s'obtenen a partir de les equacions (3.66) i (3.67), referents al moviment horitzontal de l'aparell. Com que les entrades als motors són zero, s'assumeix que  $\omega_v = 0$  i  $\omega_h = 0$  malgrat que en realitat no ho siguin —tal com s'explica en els apartats 3.3, 4.4 i 4.5. En efecte, la velocitat de les pales en aquesta situació és tan petita que no afecta a la posició de repòs del TRMS i, per tant, es considera nul·la la força propulsiva  $f_4(\omega_v)$ .

Aplicant les anteriors condicions a les citades equacions, la identificació es centra en les expressions següents, el diagrama de blocs SIMULINK de les quals es mostra en la Figura 4.32. Observeu en l'equació (4.29) com, en aquest cas, queda totalment cancel·lada la influència del rotor principal sobre el moviment horitzontal.

$$\frac{dS_h}{dt} = \frac{-b_h \dot{\alpha}_h - f_5(\alpha_h)}{D \cos^2 \alpha_v + E \sin^2 \alpha_v + F} \quad (4.29)$$

$$\frac{d\alpha_h}{dt} = S_h \quad (4.30)$$

on

$$f_5(\alpha_h) = \begin{cases} b_{cp} \cdot \alpha_h - b_{0p} & \text{si } \alpha_h \geq t_c \\ b_{cn} \cdot \alpha_h - b_{0n} & \text{si } \alpha_h < t_c \end{cases}$$


**Figura 4.32** Diagrama de blocs SIMULINK per a la identificació estàtica en el pla horitzontal

Els paràmetres a identificar són  $b_h$ ,  $b_{cp}$ ,  $b_{cn}$ ,  $b_{0p}$ ,  $b_{0n}$  i  $t_c$ , els valors originals dels quals es poden veure en la Taula 3.1. De forma anàloga al pla vertical, el moment d'inèrcia al voltant de l'eix vertical es manté constant per aquest experiment i, per aquesta raó, es desestima l'ajustament dels paràmetres  $D$ ,  $E$  i  $F$ .

Paràmetre	Valor
$b_h$	$1,54 \cdot 10^{-2}$
$b_{cp}$	$8,50 \cdot 10^{-3}$
$b_{cn}$	$4,30 \cdot 10^{-3}$
$b_{0p}$	—
$b_{0n}$	—
$t_c$	—

**Taula 4.14** Paràmetres i valors inicials de la identificació dinàmica directa en el PV  
(Nejjari *et al.* 2011b)

#### 4.11.2. Temps de mostreig i senyals d'entrada

El temps de mostreig en els presents experiments segueix les recomanacions del manual de l'aparell (Feedback Instruments 2006a) i és de 0,001 s. Per altra banda, les entrades als motors són nul·les i per tant, no hi ha entrades a considerar. Ara bé, cal tindre present que cada captura s'ha realitzat des d'un angle de guinyada diferent i això pot considerar-se com una entrada.

#### 4.11.3. Captura de dades

Per poder copsar les forces de fricció i les dels cables, es realitzen diverses captures del moviment del TRMS quan aquest es deixa anar des del màxim angle positiu de guinyada i des del màxim angle negatiu. Abans, però, convé assenyalar que el moviment vertical no es bloqueja mitjançant el cargol, tal com ocorre en el cas horitzontal. Aquí, el cargol de l'esquerra només bloqueja el codificador incremental de la

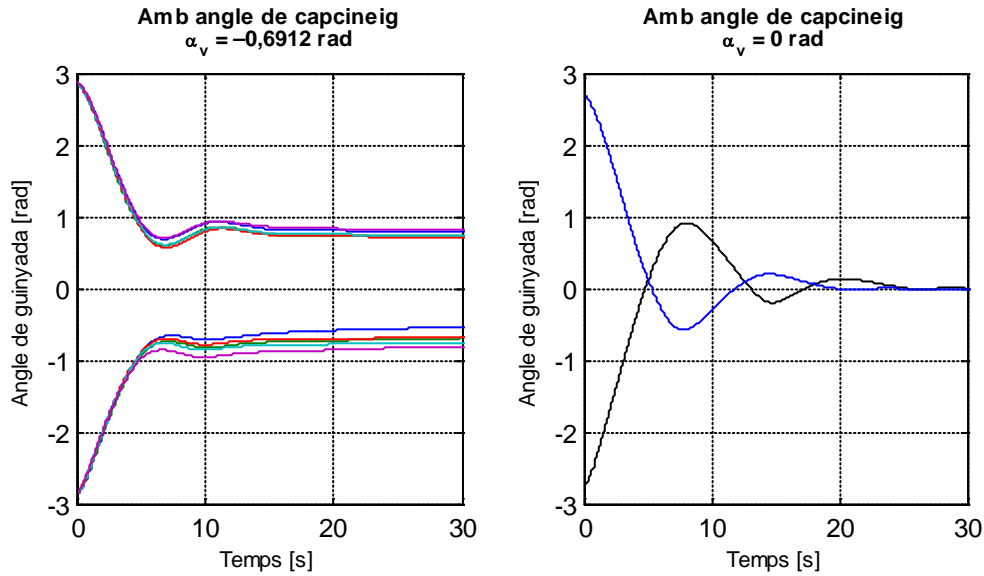
posició horitzontal, fet pel qual es recorre a l'ús de petites falques de fusta situades en els dos pius propers a l'eix horitzontal per tal de bloquejar el TRMS en l'angle de capcineig desitjat (vegeu la Figura 4.33).



**Figura 4.33** Detall de les falques en el pivot bloquejant el moviment vertical

En la Figura 4.34a podeu apreciar diferents respostes del sistema quan la posició vertical està bloquejada en la posició de repòs  $\alpha_v = -0.6912$ . En ella queda palesa la variabilitat de la posició de repòs de guinyada, que depèn enormement de la posició inicial des d'on parteix el TRMS i del moment no lineal dels cables.

En canvi, noteu la diferència amb el cas anterior en la Figura 4.34b. Si ara el TRMS es fixa en la posició de treball ( $\alpha_v = 0$ ), la distribució de la massa total es modifica, la qual cosa implica que ara la posició de repòs horitzontal és pràcticament zero ( $\alpha_h \approx 0$ ). És gràcies a això que s'opta per considerar zero el llinard del moment del cable ( $t_c = 0$ ), així com també una única posició de repòs horitzontal en  $\alpha_h = 0$  —fet que implica que  $b_{0p}$  i  $b_{0n}$  siguin també zero. D'aquesta manera, la influència dels cables queda modelitzada de la forma més simple possible, on no es té en compte la posició de capcineig del TRMS, tot i que, en realitat, sí que hi repercuteixi en l'aparició de diferents punts de repòs horitzontal. De fet, en les diferents proves efectuades el fet d'utilitzar un model dels cables amb  $t_c$ ,  $b_{0p}$  i  $b_{0n}$  diferents de zero no implica una millora aparent, ans al contrari, ja que el model continua essent excessivament senzill. Fet per fet, doncs, millor utilitzar el model més senzill de tots, la qual cosa simplifica els càlculs. Rahideh i Shaheed (2008a) i Nejjari *et al.* (2011a, b) actuen de la mateixa manera.



**Figura 4.34** Diverses captures del moviment del TRMS amb  $\alpha_v = -0.6912$  i  $\alpha_v = 0$  quan retorna lliurement a la seva posició de repòs horitzontal

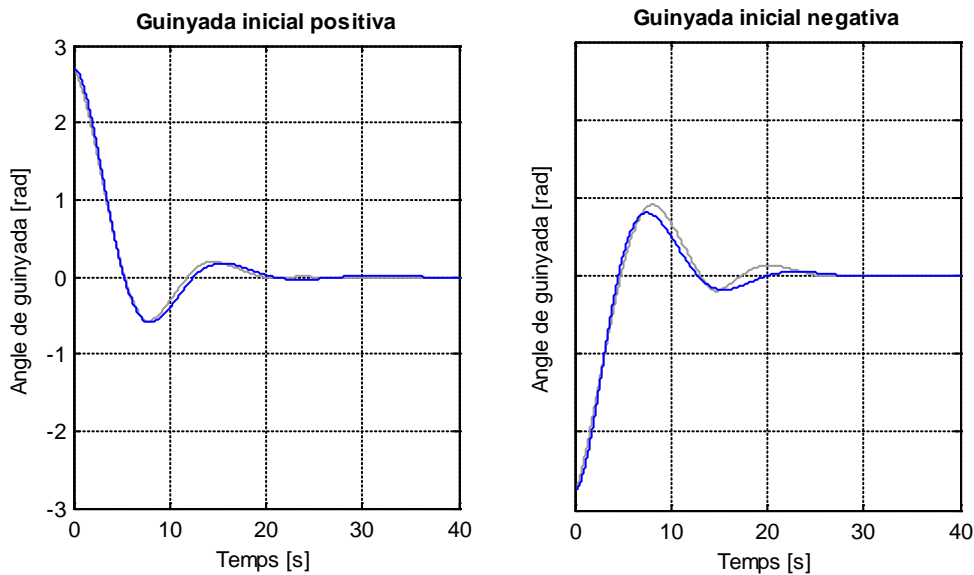
Per a la captura d'aquests senyals s'ha procedit de la següent manera. Per a les caigudes positives, en primer lloc, es situa manualment l'aparell en la posició de guinyada més negativa durant uns segons per, a continuació, realitzar el mateix procediment en la posició més positiva. Tot seguit, es deixa anar el TRMS lliurement des d'aquest punt fins que arriba a la posició de repòs. Altrament, per a les caigudes negatives s'actua de forma homòloga: primer es mesura la posició de guinyada màxima positiva i després la màxima negativa per, finalment, deixar-lo caure fins al repòs. Aquestes mesures serveixen per estimar quin és el ventall d'angle que el TRMS té en el moviment horitzontal i per poder així establir de forma precisa, en quin lloc es situa el zero de guinyada, aprofitant la simetria de moviment de l'aparell al voltant de l'eix vertical. El temps total de cada captura és de 80 s.

#### 4.11.4. Experiments i resultats

En primer lloc, a partir de les captures anteriors, es realitza una estadística sobre el ventall d'angle en el que pot girar el TRMS al voltant de l'eix vertical: de mitjana, un total de 5,7434 rad. Aquest moviment és totalment simètric, la qual cosa permet situar el zero de guinyada amb bastanta precisió en les captures —més que en el pla vertical. Finalment, es situa pròpiament el zero i es retallen temporalment els senyals, centrant-nos en la zona d'interès (vegeu la Figura 4.34). Aleshores, sabent que l'angle de guinyada màxim positiu és  $\alpha_h^{+\max} = 2,87$  rad i el màxim negatiu,  $\alpha_h^{-\max} = -2,87$  rad, s'opta per col·locar un saturador a la sortida de guinyada del model, per tal de simular aquesta limitació física (Figura 4.32).

Llavors, considerant que  $b_{0p}$ ,  $b_{0n}$  i  $t_c$  són zero, s'aplica el mètode LM via CETM a les captures de la Figura 4.34b, ja que un senyal per a la caiguda positiva i un altre per a la caiguda negativa són intuïtivament les més representatives. Els valors de  $b_h$ ,  $b_{cp}$  i  $b_{cn}$  queden ajustats en només 7 iteracions i una funció de cost

de  $397,97$  ( $eqm = 4,97 \cdot 10^{-3}$ ) en  $b_h = 22,60 \cdot 10^{-3}$ ,  $b_{cp} = 11,22 \cdot 10^{-3}$  i  $b_{cn} = 13,87 \cdot 10^{-3}$ . El resultat de l'ajustament es pot apreciar en la Figura 4.35 i en la Taula 4.15.



**Figura 4.35** Respostes del TRMS (en gris) i del model (en blau) quan es deixa caure des d'un angle positiu i des d'un negatiu

Paràmetre	Valor original	Valor ajustat
$b_h$	$1,54 \cdot 10^{-2}$	$2,26 \cdot 10^{-2}$
$b_{cp}$	$8,50 \cdot 10^{-3}$	$11,22 \cdot 10^{-3}$
$b_{cn}$	$4,30 \cdot 10^{-3}$	$13,87 \cdot 10^{-3}$
$b_{op}$	—	0
$b_{on}$	—	0
$t_c$	—	0

**Taula 4.15** Paràmetres del model (estàtica horitzontal) i llurs valors originals i ajustats

## 4.12. Identificació dinàmica directa en el pla horitzontal

Amb el moviment vertical bloquejat, s'excita el motor de cua i es mesura l'angle de guinyada. D'aquesta manera, s'intenta modelitzar la influència directa del motor de cua sobre el moviment horitzontal. Atès que el cargol esquerre no bloqueja el moviment vertical sinó només el codificador, l'aparell es bloqueja en  $\alpha_v = 0$  mitjançant l'ús de falques de fusta (Figura 4.33), la qual cosa implica un moment d'inèrcia horitzontal constant.

### 4.12.1. Equacions, diagrama de blocs i paràmetres a identificar

Les equacions en què es basa aquesta identificació s'obtenen a partir de (3.66) i (3.67), referents al moviment horitzontal de l'aparell. Ara sí que es considera la força propulsiva del motor de cua  $f_4(\omega_h)$ .

Aleshores, a més de les equacions (3.64) i (3.65) que governen l'etapa preliminar i el motor de cua, les equacions simplifiades a tenir en compte en els presents experiments són:

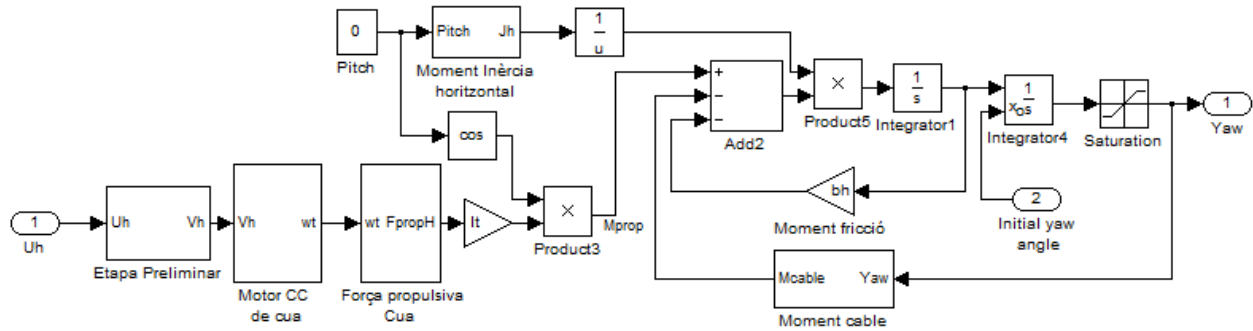
$$\frac{dS_h}{dt} = \frac{l_t f_4(\omega_h) \cos \alpha_v - b_h \dot{\alpha}_h - f_5(\alpha_h)}{D \cos^2 \alpha_v + E \sin^2 \alpha_v + F} \quad (4.31)$$

$$\frac{d\alpha_h}{dt} = S_h \quad (4.32)$$

on

$$f_5(\alpha_h) = \begin{cases} b_{cn} \cdot \alpha_h & \text{si } \alpha_h < 0 \\ b_{cp} \cdot \alpha_h & \text{si } \alpha_h \geq 0 \end{cases}$$

Vegeu en la següent figura el diagrama de blocs SIMULINK amb què s'han realitzat els experiments, construït a partir de les equacions anteriors.



**Figura 4.36** Diagrama de blocs SIMULINK per a la identificació dinàmica directa en el pla horitzontal

La influència del motor principal en el moviment vertical queda marcada pels paràmetres  $k_{fvp}$  i  $k_{fvm}$ . En la Taula 4.16 es poden apreciar els valors originals d'aquests paràmetres que serveixen com a punt inicial per al càlcul d'optimització i que són extrets de Rahideh i Shaheed (2007).

Paràmetre	Valor
$k_{fhp}$	$1,84 \cdot 10^{-6}$
$k_{fhn}$	$2,20 \cdot 10^{-7}$

**Taula 4.16** Paràmetres i valors inicials de la identificació dinàmica directa en el PH

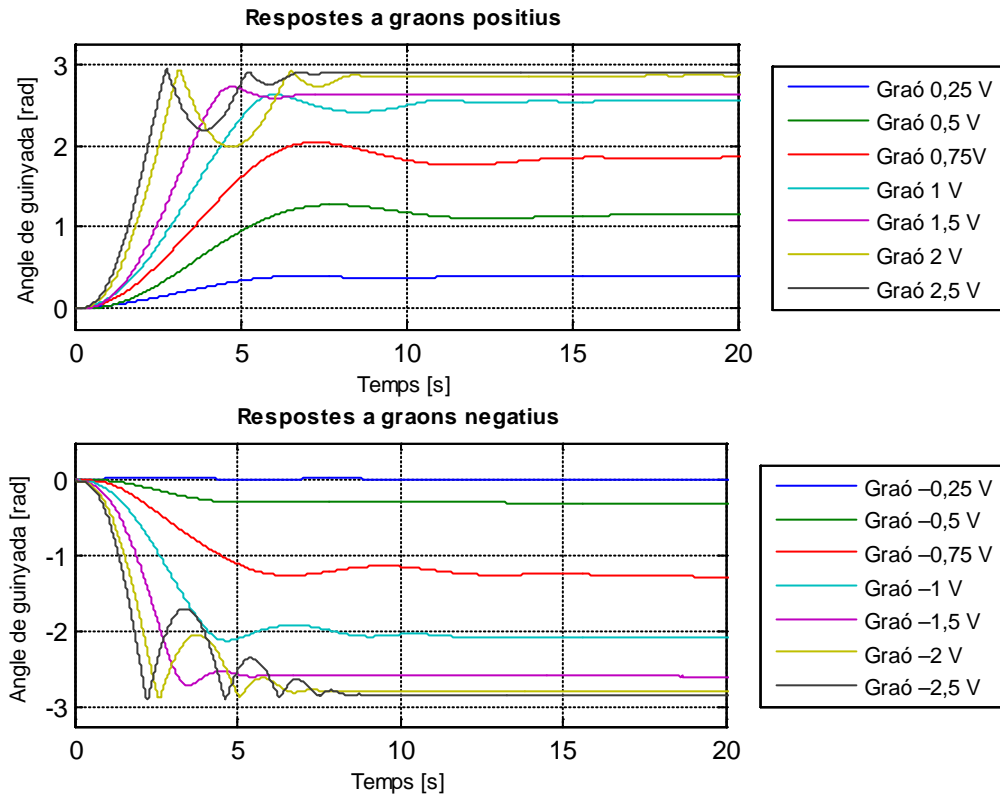
#### 4.12.2. Temps de mostreig i senyals d'entrada

El temps de mostreig en els experiments presents segueix les recomanacions del manual de l'aparell (Feedback Instruments 2006a) i té un valor de 0,001 s. Per altra banda, després d'experimentar amb diferents senyals d'entrada i veure quin aporta més informació sobre el sistema, finalment s'opta per utilitzar una combinació de graons de diferents amplituds dins del marge d'operació del TRMS ( $\pm 2,5$  V).

#### 4.12.3. Captura de dades

Bloquejant el TRMS en  $\alpha_v = 0$ , es realitzen un total de 14 captures de l'angle de guinyada com a resposta als graons d'amplitud  $\pm 2,5$  V,  $\pm 2$  V,  $\pm 1,5$  V,  $\pm 1$  V,  $\pm 0,75$  V,  $\pm 0,5$  V i  $\pm 0,25$  V (vegeu la Figura 4.37). Val la pena recordar la gran variabilitat de la posició de repòs horitzontal, sempre propera a zero. Malgrat això, a partir d'aquest punt el procediment per a realitzar les captures de guinyada, a diferència del cas anterior (estàtica horitzontal), és situar manualment el TRMS en  $\alpha_h = 0$  just quan s'iniciï la captura. Això facilita enormement tant la pròpia captura com el processament del senyal i, tanmateix, les conseqüències d'aquest forçament són ínfimes.

Així mateix, també es capturen les respostes als mateixos graons però bloquejant el TRMS en un angle de capcineig elevat  $\alpha_v \approx \alpha_v^{+\max}$ . La idea central és assegurar-se de la proporcionalitat del moment propulsiu amb un factor depenent de l'angle de capcineig.



**Figura 4.37** Respostes en el pla horitzontal del TRMS a  $\alpha_v = 0$

als graons  $\pm 2,5$  V,  $\pm 2$  V,  $\pm 1,5$  V,  $\pm 1$  V,  $\pm 0,75$  V,  $\pm 0,5$  V i  $\pm 0,25$  V.

Com s'apunta en l'apartat 3.1.1, el ventall d'actuació del TRMS en el pla horitzontal està limitat físicament, fet que afecta a algunes de les respostes capturades, especialment les de major amplitud (vegeu la Figura 4.37). D'igual manera que en el cas vertical, el TRMS limita la captura del règim



transitori d'algunes de les respostes, la qual cosa aporta ben poca informació i implica la desestimació d'alguns senyals per al càlcul dels paràmetres.

#### 4.12.4. Experiments i resultats

En aquest cas no és necessari realitzar cap preprocessament de les dades, ja que l'angle de guinyada inicial és el zero real. Aleshores, amb aquestes dades es pretén aproximar polinòmicament el bloc de la força propulsiva del rotor de cua que apareix en la Figura 4.36 —o en altres paraules, ajustar els valors dels paràmetres  $k_{fhp}$  i  $k_{fhn}$  de la funció  $f_4(\omega_h)$ . Per fer-ho, cal trobar a partir de les captures (que relacionen volts d'entrada amb radians de sortida) una relació entre l'entrada a aquest bloc (velocitat angular de les pales del motor de cua,  $\omega_h$ ) i la seva sortida ( $f_4(\omega_h)$ , força propulsiva).

Per obtenir les dades de l'entrada al bloc, s'apliquen les mateixes entrades de la captura (els graons) al model de l'etapa preliminar i del motor de cua vist en l'apartat 4.4, a fi de saber quina velocitat de gir correspon en règim permanent a cada graó d'entrada.

Per a la sortida del bloc, es considera que, estant el sistema en règim permanent, les sortides s'estabilitzen pràcticament en un valor constant i les derivades tendeixen a zero ( $d/dt \rightarrow 0$ ). Aplicant aquests criteris a l'equació (4.31), s'obté el següent desenvolupament per a la força propulsiva:

$$0 = \frac{l_t f_4(\omega_h) \cos \alpha_v - f_5(\alpha_h)}{D \cos^2 \alpha_v + E \sin^2 \alpha_v + F}$$

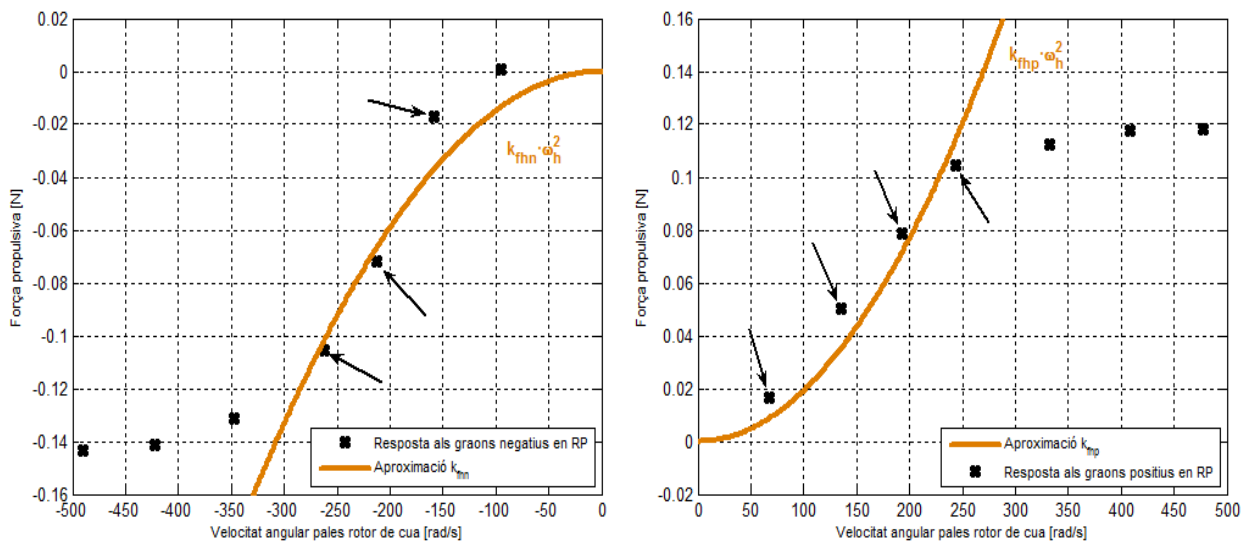
$$f_4(\omega_h^\infty) = \frac{\tau_{\text{cable}}(\alpha_h)}{l_t \cdot \cos \alpha_v^0} \quad (4.33)$$

Noteu com  $\tau_{fh}$  també és zero en règim permanent ja que depèn directament d'una derivada, és a dir, de la velocitat de guinyada ( $\dot{\alpha}_h$ ). Aleshores, l'equació (4.33) permet disposar dels diferents valors de la força propulsiva a partir del règim permanent dels angles de guinyada de cada captura. Convé ressaltar que les dades utilitzades són les relatives a les captures amb l'angle de capcineig bloquejat a  $\alpha_v = 0$ .

Un cop adequades les dades capturades en dades d'entrada al bloc de força propulsiva (velocitats angulars de les pales en règim permanent) i en dades de sortida del bloc (força propulsiva en règim permanent), es procedeix a relacionar els seus valors en règim permanent (mitjana de les últimes mostres) mitjançant un polinomi de segon grau (Rahideh i Shaheed 2007, 2008a). Per aconseguir-ho, s'utilitza el *Curve Fitting Toolbox* 1.1.4. L'èxit dels resultats d'aquests experiments és fruit de l'elecció correcta dels punts per a l'ajustament de la corba polinòmica. Es realitzen diferents tries dels punts que obtenen resultats bastant poc homogenis i, per això, finalment s'acaba optimitzant només tenint en compte les captures referents

als graons  $+0,25$ ,  $\pm 0,5$  V,  $\pm 0,75$  V i  $\pm 1$  V per ser els més representatius en cadascun dels seus marges d'actuació. Les captures referents als graons de màxima amplitud ( $\pm 2,5$  V,  $\pm 2$  V i  $\pm 1,5$  V) aporten poca informació perquè el propi TRMS bloqueja físicament les seves respostes, i la de  $-0,25$  V, en tant que graó de poca amplitud, també és poc efectiu. En la Figura 4.38 es mostren els resultats ajustats, on es poden veure senyalats els punts que s'han considerat per a l'optimització. Per als graons positius, el polinomi de segon grau òptim que s'ajusta als punts establerts té un coeficient de  $k_{fhp} = 1,9258 \cdot 10^{-6}$  amb un *eqm* de  $4,3 \cdot 10^{-4}$ . En canvi, per als graons negatius, el paràmetre  $k_{fhn}$  que optimitza les dades té un valor de  $1,4783 \cdot 10^{-6}$  amb un *eqm* de  $4,4 \cdot 10^{-4}$ .

Finalment, es constata amb les captures de l'angle de capcineig elevat la proporcionalitat trigonomètrica del moment propulsiu amb l'angle de capcineig, obtenint un valor força similar a l'anterior (no s'adjunten els resultats).



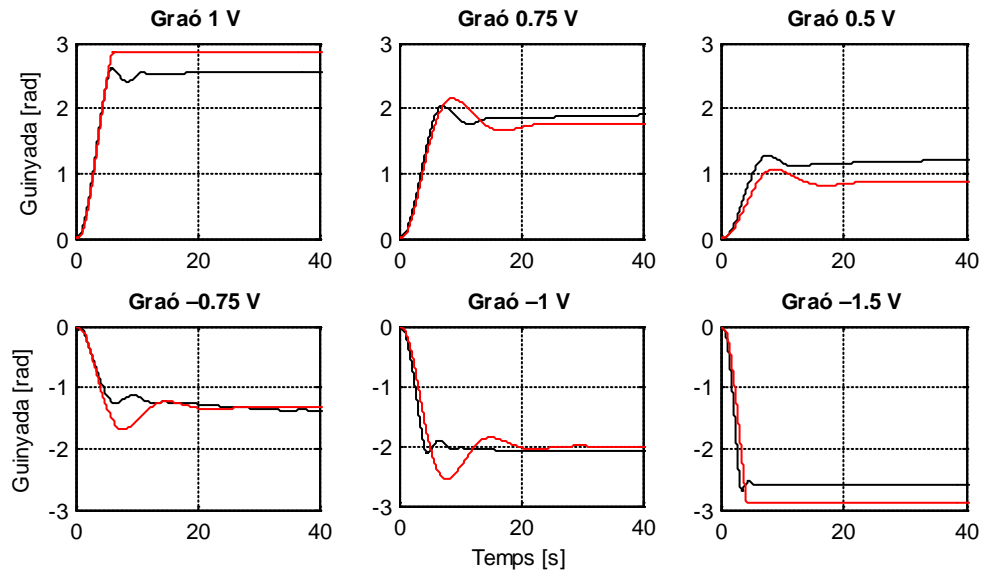
**Figura 4.38** Ajustament polinòmic dels paràmetres  $k_{fhp}$  i  $k_{fhn}$  per mínims quadrats

Paràmetre	Valor original	Valor ajustat
$k_{fhp}$	$1,84 \cdot 10^{-6}$	$1,93 \cdot 10^{-6}$
$k_{fhn}$	$2,20 \cdot 10^{-7}$	$1,48 \cdot 10^{-6}$

**Taula 4.17** Paràmetres del model (dinàmica directa horitzontal) i llurs valors originals i ajustats

#### 4.12.5. Validació

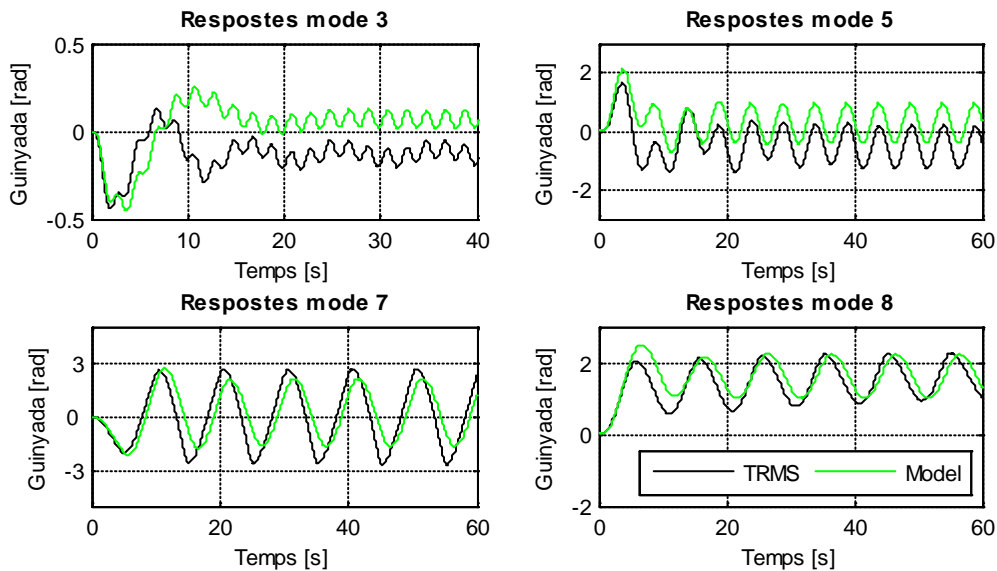
Val la pena recordar que el moviment vertical continua bloquejat i que l'entrada al motor principal és zero. En la Figura 4.39 es comparen algunes de les respostes simulades els paràmetres obtinguts amb les dades capturades (dades d'entrenament). Salta a la vista que no es tracta d'un model molt acurat, ja que s'ha partit d'un model força rudimentari de les forces del cable que actuen el pla horitzontal. Tot i així, aconsegueix *seguir* la majoria de senyals amb una mica de retard.



**Figura 4.39** Respostes del TRMS (en negre) i del model (en vermell) a diferents graons d'entrada

Si es simulen altres respostes no utilitzades en l'optimització, els resultats poden veure's en la Figura 4.40 i en la Taula 4.18, quan el motor de cua s'excita amb els següents modes:

- Mode 3: Senyal quadrat de freqüència 0,5 Hz i amplitud 1,5 V durant 60 s.
- Mode 5: Sinus de freqüència 0,2 Hz i amplitud 2 V durant 60 s.
- Mode 7: Senyal quadrat de freqüència 0,1 Hz i amplitud 1 V durant 60 s.
- Mode 8: 0,7 V de contínua i un sinus de freqüència 0,1 Hz i amplitud 0,3 V durant 60 s.



**Figura 4.40** Comparativa entre les respostes del TRMS i les del model per a la identificació dinàmica directa en el PH (dades de validació)

Entrada	eqm	errn (%)
Mode 3	$42,1 \cdot 10^{-3}$	131,76

Mode 5	$6,45 \cdot 10^{-1}$	105,64
Mode 7	$9,15 \cdot 10^{-1}$	56,26
Mode 8	$1,19 \cdot 10^{-1}$	22,77

**Taula 4.18** Criteris de validació de la identificació dinàmica directa en el pla horitzontal

### 4.13. Identificació dinàmica creuada en el pla horitzontal

Amb el moviment vertical bloquejat i des d'una posició vertical del TRMS en règim permanent, s'excita el rotor principal i es mesura com evoluciona l'angle de guinyada. D'aquesta manera, s'intenta modelitzar la influència que té el motor principal sobre el moviment horitzontal. Novament, l'aparell es bloqueja mitjançant l'ús de falques de fusta.

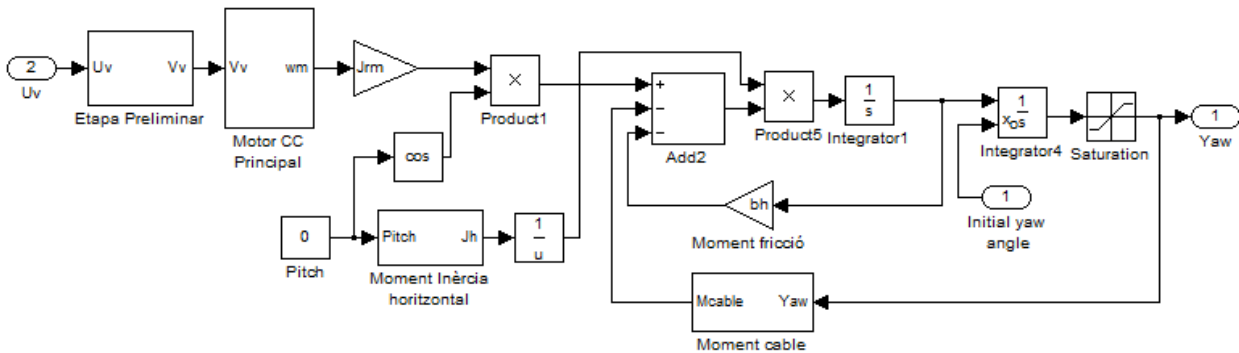
#### 4.13.1. Equacions, diagrama de blocs i paràmetres a identificar

Les equacions (3.66) i (3.67) són en les que es basa aquesta etapa d'identificació. En elles, però, cal tenir en compte les simplificacions adequades al disseny de l'experiment. En primer lloc, el motor de cua es considera apagat, és a dir, que  $f_4(\omega_v) \approx 0$  per motius de senzillesa —el guany a modelitzar és tan simple que no cal entrar en detalls sobre l'angle de guinyada inicial. Aleshores, les equacions adequades a aquests experiments són:

$$\frac{dS_h}{dt} = \frac{-b_h \dot{\alpha}_h - \tau_{\text{cable}} + J_{rm} \omega_v \cos \alpha_v}{D \cos^2 \alpha_v + E \sin^2 \alpha_v + F} \quad (4.34)$$

$$\frac{d\alpha_h}{dt} = S_h \quad (4.35)$$

En la següent figura es mostra el diagrama de blocs SIMULINK amb què s'han realitzat els experiments, i que ha estat construït a partir de les anteriors equacions. El valor de  $J_{rm}$  a partir del qual s'ha realitzat tot el procés és  $2,7481 \cdot 10^{-4}$ .



**Figura 4.41** Diagrama de blocs SIMULINK per a la identificació dinàmica creuada en el pla horitzontal

#### 4.13.2. Temps de mostreig i senyals d'entrada

El temps de mostreig en els experiments presents segueix les recomanacions del manual de l'aparell (Feedback Instruments 2006a) i té un valor de 0,001 s. Per altra banda, després d'experimentar amb diferents senyals d'entrada i veure quin aporta més informació sobre el sistema, finalment s'opta per utilitzar una combinació de graons de diferents amplituds dins del marge d'operació del TRMS ( $\pm 2,5$  V).

#### 4.13.3. Captura de dades

Es realitzen nombroses captures per veure de quina manera afecta la influència del rotor principal sobre el moviment horitzontal. El comportament del TRMS per a diferents posicions fixes de capcineig és força estrany i, en certa manera, desafia els postulats de la física. Per la conservació del moment angular, s'espera que el TRMS giri en sentit horari al voltant de l'eix vertical quan les pales del rotor principal giren en senti antihorari; i viceversa. Això és causat per l'aparició d'un moment angular vertical que s'oposa a la component vertical (paral·lela a l'eix vertical de rotació) del moment angular de les pales de rotor, per tal que en el sistema global es mantingui constant (Tipler i Mosca 2005a). Aquest fet queda il·lustrat en la Figura 4.42: quan la noia manté el moment angular de la roda que gira de forma perpendicular al l'eix  $z$ , ella resta quieta; però quan aixeca una mica la roda, la component vertical del moment de la roda deixa de ser nul·la i apareix, per mantenir constant aquesta magnitud, un moment angular vertical que fa rotar la plataforma giratòria.

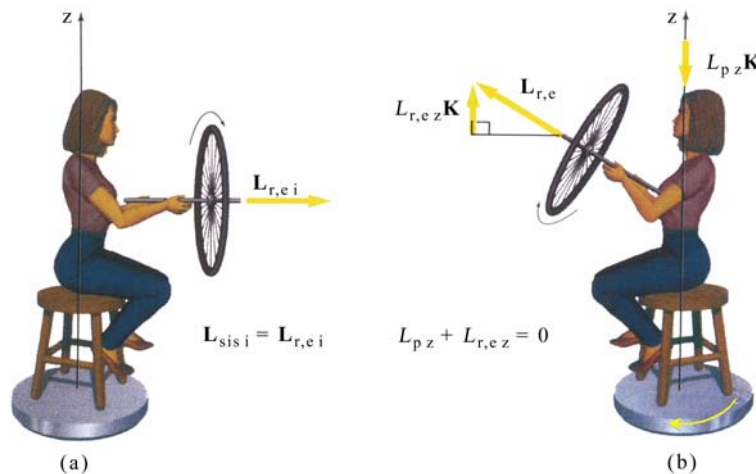
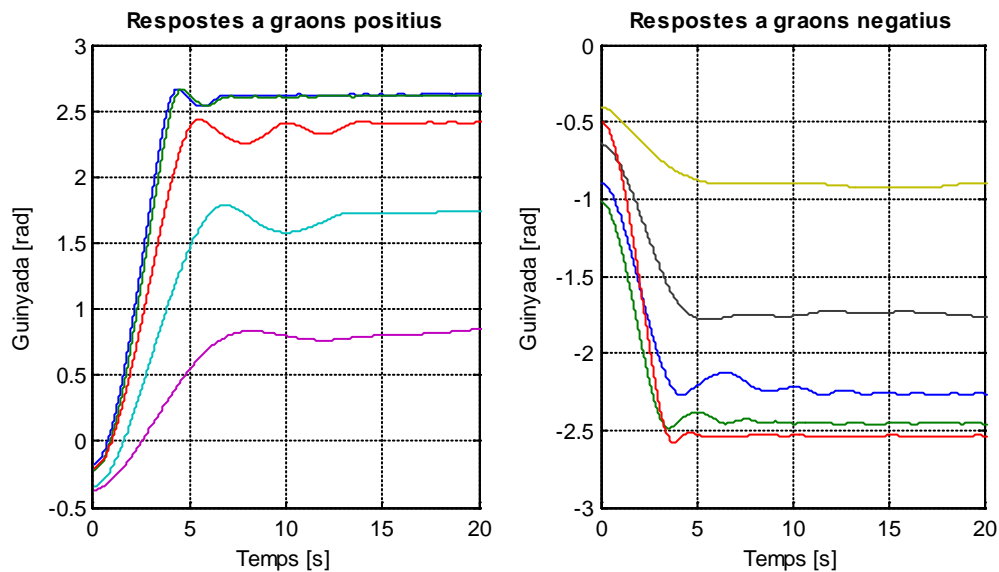


Figura 4.42 Conservació del moment angular (Tipler i Mosca 2005a)

Tanmateix, en el TRMS no sempre ocorre el mateix. En primer lloc, considereu que el TRMS es troba fixe en una posició de capcineig. En angles de capcineig positius i en negatius propers a zero, l'aparell compleix exactament els supòsits teòrics. En canvi, a partir de cert angle de capcineig negatiu —i aquí també s'hi inclou l'angle de la posició de repòs el TRMS actua de forma inversa a la que hauria d'actuar: quan se li aplica un graó positiu al motor principal i aquest gira en sentit antihorari—, tot

l'aparell també gira en el mateix sentit; quan se li aplica un graó negatiu el rotor gira en sentit horari—, tot l'aparell gira en sentit horari.

Com que el model analític que pretén descriure aquesta influència és molt senzill, un simple guany  $J_m$ — i és incapaç de copsar tota aquesta dinàmica, s'opta per eludir captures que continguin informació sobre angles de capcineig negatius, i es centra l'estudi en la posició de treball ( $\alpha_v = 0$ ), ja que és la més representativa i on el moment angular té la seva màxima magnitud. Aleshores, amb el TRMS bloquejat verticalment en  $\alpha_v = 0$ , es capturen les evolucions de l'angle de guinyada quan el rotor principal s'excita amb graons d'amplituds  $\pm 0,5$  V,  $\pm 1$  V,  $\pm 1,5$  V,  $\pm 2$  V i  $\pm 2,5$  V (Figura 4.43).



**Figura 4.43** Respostes del moviment horitzontal del TRMS a diferents graons aplicats en el motor principal

El procediment per a la captura és el mateix dels experiments de la identificació estàtica horitzontal. En cada captura, de 100 s, es busca en primer lloc el mínim de forma manual durant uns segons i, abans que comenci a actuar el graó en el motor principal, es torna l'aparell a la posició de repòs. Amb això es pot situar exactament l'angle de guinyada zero en l'eix d'ordenades del senyal. Noteu en la Figura 4.43 que en cada captura l'angle de guinyada és diferent.

De la mateixa manera que l'experiment anterior, el TRMS es veu afectat per la limitació física i, per tant, cal desestimar les respostes afectades per aquest fet. Entre elles, hi ha les respostes als graons  $\pm 2$  V i  $\pm 2,5$  V (vegeu-ho en els marges superior i inferior de la Figura 4.43). A més, també es desestimen les respostes dels graons  $\pm 0,5$  V per no tenir molta amplitud i no aportar res rellevant al model.

#### 4.13.4. Experiments i resultats

En primer lloc es processen les dades capturades, les quals es situen sobre l'eix de coordenades real i es retallen en el marge temporal d'interès —és a dir, des de que s'aplica el graó fins al règim permanent (Figura 4.43). Noteu que la guinyada inicial de cada captura és diferent.

Amb aquestes dades es pretén aproximar linealment la influència del rotor principal sobre el moviment horitzontal a través de l'ajustament del paràmetre  $J_{rm}$ . Per fer-ho, cal trobar a partir de les captures una relació entre l'entrada a aquest guany (velocitat angular de les pales del rotor principal,  $\omega_v$ ) i la seva sortida en règim permanent.

Per obtenir les dades de l'entrada al bloc, s'apliquen les mateixes entrades de la captura (els graons) al model de l'etapa preliminar i del motor principal vist en l'apartat 4.5, a fi de saber quina velocitat de gir correspon en règim permanent a cada graó d'entrada.

Per a la sortida del bloc, es considera que, estant el sistema en règim permanent, les sortides s'estabilitzen pràcticament en un valor constant i les derivades tendeixen a zero ( $d/dt \rightarrow 0$ ). Aplicant aquests criteris a l'equació (4.34), s'obté el següent desenvolupament per al moment del rotor principal:

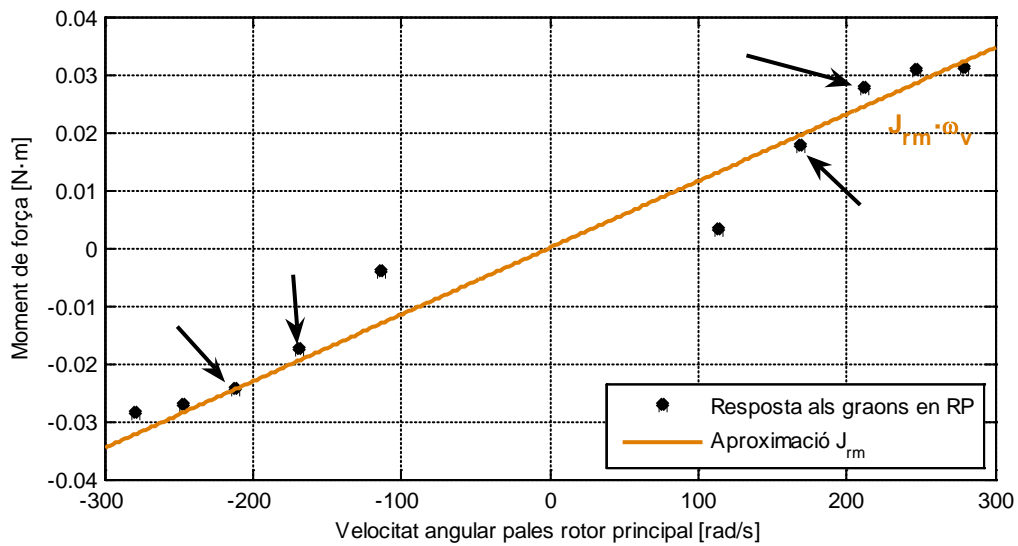
$$0 = \frac{-f_5(\alpha_h) + J_{rm}\omega_v \cos \alpha_v}{D \cos^2 \alpha_v + E \sin^2 \alpha_v + F}$$

$$\tau_{ip} = J_{rm} \cdot \omega_v = \frac{f_5(\alpha_h)}{\cos \alpha_v} \quad (4.36)$$

Noteu com  $\tau_{jh}$  també és zero en règim permanent ja que depèn directament d'una derivada, és a dir, de la velocitat de guinyada ( $\dot{\alpha}_h$ ). Aleshores, l'equació (4.36) permet disposar dels diferents valors del moment del rotor principal a partir del règim permanent dels angles de guinyada de cada captura. Adoneu-vos que l'angle de capcineig és constant.

Un cop adequades les dades capturades en dades d'entrada al guany (velocitats angulars de les pales en règim permanent) i en dades de sortida del guany (moment de força en règim permanent), es procedeix a relacionar els seus valors en règim permanent (mitjana de les últimes mostres) mitjançant un polinomi de primer grau. Per aconseguir-ho, s'utilitza el *Curve Fitting Toolbox* 1.1.4. Com ja s'ha comentat anteriorment, s'optimitza considerant només les captures referents als graons  $\pm 1$  V i  $\pm 1,5$  V. Les captures referents als graons de màxima amplitud aporten poca informació perquè el propi TRMS bloqueja físicament les seves respostes, i les referents als graons de poca amplitud també són poc efectives. En la

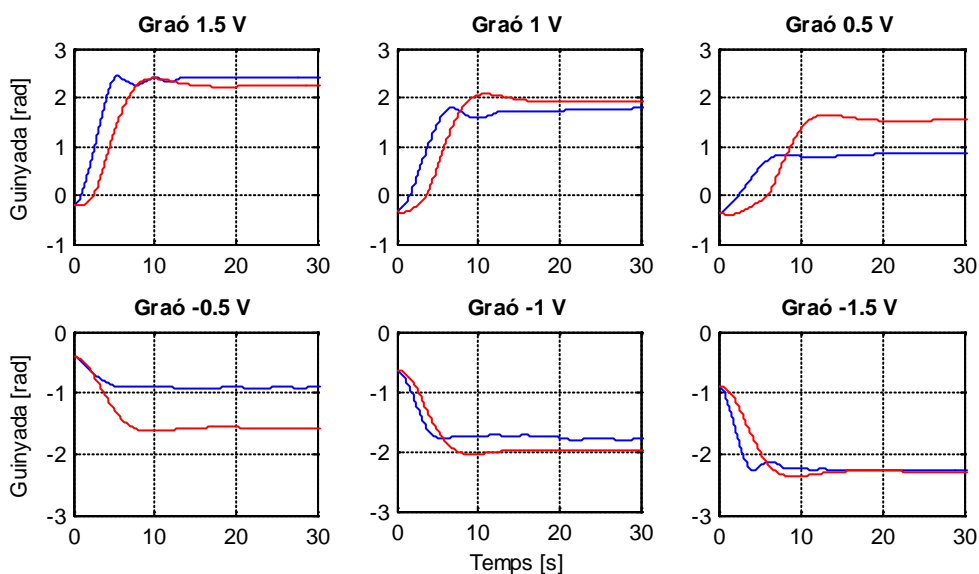
Figura 4.44 es mostren els resultats ajustats, on es poden veure senyalats els punts que s'han considerat per a l'optimització. La recta ajusta amb un  $eqm$  de  $1,739 \cdot 10^{-5}$  el valor de  $J_{rm}$  en  $1,1547 \cdot 10^{-4}$ .



**Figura 4.44** Ajustament polinòmic del paràmetre  $J_{rm}$  per mínims quadrats

En la Figura 4.45 es comparen algunes de les respostes simulades amb els paràmetres obtinguts amb les dades capturades (dades d'entrenament). Noteu que no es tracta d'un model acurat ja que amb l'ajustament d'un sol guany és impossible captar tota la dinàmica existent. Tanmateix, a grans trets actua com ha d'actuar segons la conservació del moment angular, i en la mesura més a o menys adequada.

Adoneu-vos que la constant de temps del model no està ben ajustada i, per això, el model respon més tard que el sistema, la qual cosa pot causar una limitació.



**Figura 4.45** Respostes en el pla horitzontal del TRMS i del model per a diferents graons d'entrada al motor principal



Paràmetre	Valor original	Valor ajustat
$J_{rm}$	$2,75 \cdot 10^{-4}$	$1,15 \cdot 10^{-4}$

**Taula 4.19** Paràmetres del model (dinàmica creuada horitzontal)  
i llurs valors originals i ajustats

#### 4.14. Conclusions sobre la identificació en el pla horitzontal

Allò primer que es desprèn dels resultats de la identificació en el pla horitzontal és que tant de bo en aquest pla hi actués una força com la de la gravetat, que és arxiconeguda i estudiada. Com és sabut, el moviment en el pla horitzontal està influenciat per la força exercida pels cables plans del TRMS, una força summament no lineal, no simètrica, no constant i gens coneguda. La senzilla modelització del moment del cable que s'ha considerat afecta enormement a la construcció de la resta model i en gran part, al seu èxit.

Que el moment del cable sigui tan variable, afecta no només a la posició inicial de guinyada sinó, de forma més general, a qualsevol valor de règim permanent en el pla horitzontal, fet que resta qualitat al model. El TRMS no té mai la mateixa posició de repòs de guinyada i això influeix en la correcta identificació del model global, ja que les condicions inicials sempre són diferents.

El valor final en règim permanent, alhora, també influeix en el transcurs del propi transitori. La influència del rotor de cua queda ben modelitzada ja que la constant de temps és aproximadament la del sistema (Figura 4.39). Ara bé, ni el model més acurat de la fricció garantiria una millora en aquest aspecte.

En canvi, la modelització de la influència creuada ocasiona els mateixos problemes que en el pla vertical: una constant de temps major que la del sistema, amb les conseqüències de transitori que això comporta. I aquí aquest fet pren especial rellevància, ja que la influència del rotor principal sobre el moviment horitzontal és notable en comparació a la del motor de cua sobre el vertical.

Constategu, si més no, la conservació del moment angular en la Figura 4.49 (guinyada del mode 13). Val a dir que aquí, a diferència d'altres estudis que construeixen el model en base a la conservació del moment angular —com ara Rahideh i Shaheed (2007, 2008a), Feedback Instruments (1998b), Christensen *et al.* (2006) i Nejari *et al.* (2011b)—, en aquest projecte s'entén aquest concepte com una conseqüència.

Malgrat tot això, l'ample de banda en aquest pla ronda els 0,5 Hz. Les respostes del mode 3 de la Figura 4.40 assenyalen que 0,5 Hz ja és una freqüència límit i que, malgrat que el model permet simular la freqüència fonamental, apareix un efecte d'atenuació de l'amplitud que no es correspon amb la realitat. Amb tota seguretat, hi ha no-linealitats que no han estat copsades pel model. Observeu com en les altres

captures de la mateixa figura com, a mesura que es baixa la freqüència d'entrada, el model s'ajusta millor al sistema.

## 4.15. Identificació del sistema global

El darrer pas en el procés d'identificació de paràmetres ajusta els coeficients dels dos moments de força que, fins ara, no han estat considerats en cap dels experiments anteriors. Això és, el moment de l'efecte giroscòpic i el moment de la força centrífuga. Amb el TRMS totalment lliure —és a dir, sense bloquejar cap moviment—, s'exciten els dos motors i es mesuren els dos angles de posició, tot i que, a la pràctica, només l'angle de capcineig és usat per a l'optimització.

### 4.15.1. Equacions, diagrama de blocs i paràmetres a identificar

Aquí les equacions en les quals es basa el present experiment són totes les que descriuen el sistema global, és a dir, totes les de l'apartat 3.9.1. A més, convé ressaltar que no hi ha cap simplificació. En conseqüència, el diagrama de blocs és el sistema complet de la Figura 3.17. Les constants a ajustar són les referents als moment de l'efecte giroscòpic i al de la força centrífuga, això és,  $H$  i  $k_g$ , que tenen uns valors inicials d' $H = 0,053$  i  $k_g = 0,2$ .

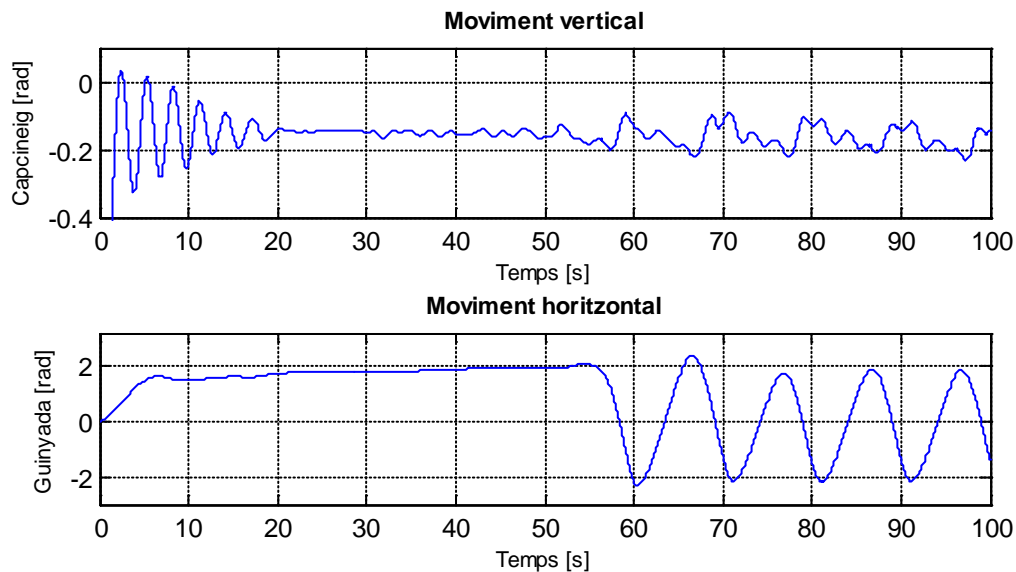
### 4.15.2. Temps de mostreig i senyals d'entrada

El temps de mostreig en els experiments presents segueix les recomanacions del manual de l'aparell (Feedback Instruments 2006a) i té un valor de 0,001 s. Com que cal explotar al màxim les propietats dels dos moments, la velocitat de guinyada ( $\dot{\alpha}_h$ ), l'angle de capcineig ( $\alpha_v$ ) i la velocitat angular del motor principal ( $\omega_v$ ) han de ser diferents de zero. Aleshores, per al motor de cua, s'utilitza un senyal que variï constantment, com per exemple un sinus, i no un graó que el faria arribar al règim permanent on la velocitat de guinyada seria zero. En canvi, el motor principal s'excita amb un graó per tal que assoleixi el règim permanent el més aviat possible i el valor de l'angle de capcineig i de la velocitat angular del motor siguin el més constants possible, però diferents de zero.

### 4.15.3. Captura de dades

A causa dels diferents escenaris possibles en quant a condicions inicials i senyals d'excitació, es realitza una sola captura amb un temps total de 100 s. S'espera, per intuïció i per diferents proves en el laboratori, que aquesta sigui suficientment representativa de la resta de casos. En primer lloc, s'excita el motor principal amb un graó d'amplitud 1,5 V, mentre que el motor de cua resta sense excitació. És a partir del segon 50, quan el moviment vertical ja es troba en règim permanent, que s'excita el motor de cua amb un senyal sinusoidal de freqüència 0,1 Hz, amb amplitud 1 V i component contínua de -0,5 V. En la Figura

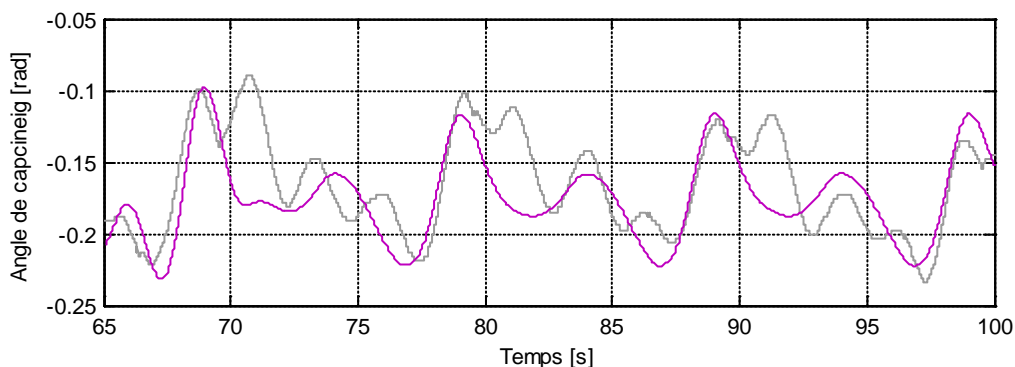
4.46 es poden apreciar les respostes del TRMS a aquests senyals. Noteu-hi la influència periòdica del moviment de guinyada sobre el moviment vertical a partir del segon 50. És en aquest interval de temps on s'efectua l'optimització.



**Figura 4.46** Respostes del TRMS a l'entrada d'un graó (motor principal i  $t = 0$  s) i d'un senyal sinusoidal (motor de cua i  $t = 50$  s)

#### 4.15.4. Experiments i resultats

S'ha de tenir en compte que s'optimitza respecte a les captures de l'angle de capcineig, que és el moviment en què els dos moments de força tenen influència. En primer lloc, mitjançant el mètode de prova i error es realitza un primer ajustament de les constants  $H$  i  $k_g$ , que passen a tenir uns valors d' $H = 0,053$  i  $k_g = 5 \cdot 10^{-5}$ . Aleshores, amb el CETM s'aplica el mètode de Levenberg-Marquardt als darrers 50 s de la captura i, en 7 iteracions i una funció de cost de 422,01 ( $eqm = 8,44 \cdot 10^{-3}$ ), s'obtenen uns valors d' $H = 0,1296$  i  $k_g = 5,123 \cdot 10^{-5}$ . L'ajustament es pot veure en la Figura 4.47 i en la Taula 4.20.



**Figura 4.47** Ajustament de les respostes del TRMS (en gris) i del model (en magenta) després de l'optimització

Paràmetre	Valor original	Valor ajustat
$H$	0,053	0,1296
$k_g$	0,2	$5,12 \cdot 10^{-5}$

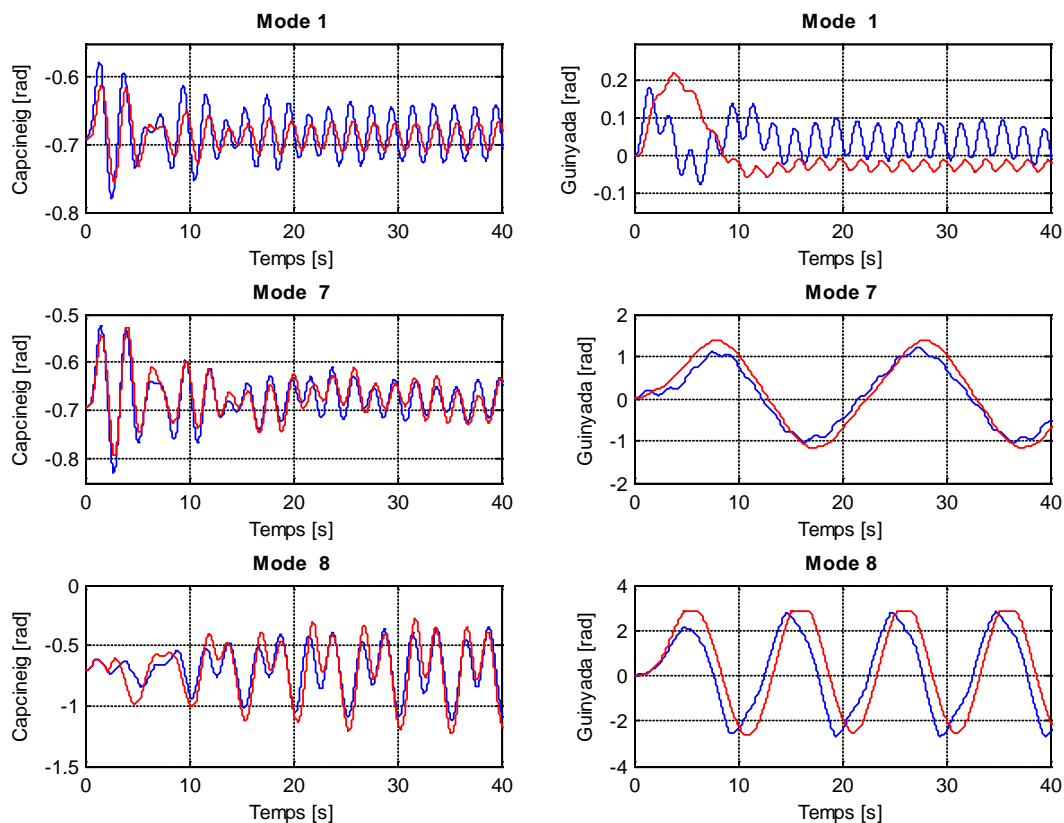
**Taula 4.20** Paràmetres dels moments de força identificats i llurs valors originals i ajustats

#### 4.15.5. Validació

Per a la validació del model global es comparen les respostes del sistema i del model a les mateixes entrades. Els diferents modes d'excitació es detallen en la Taula 4.21:

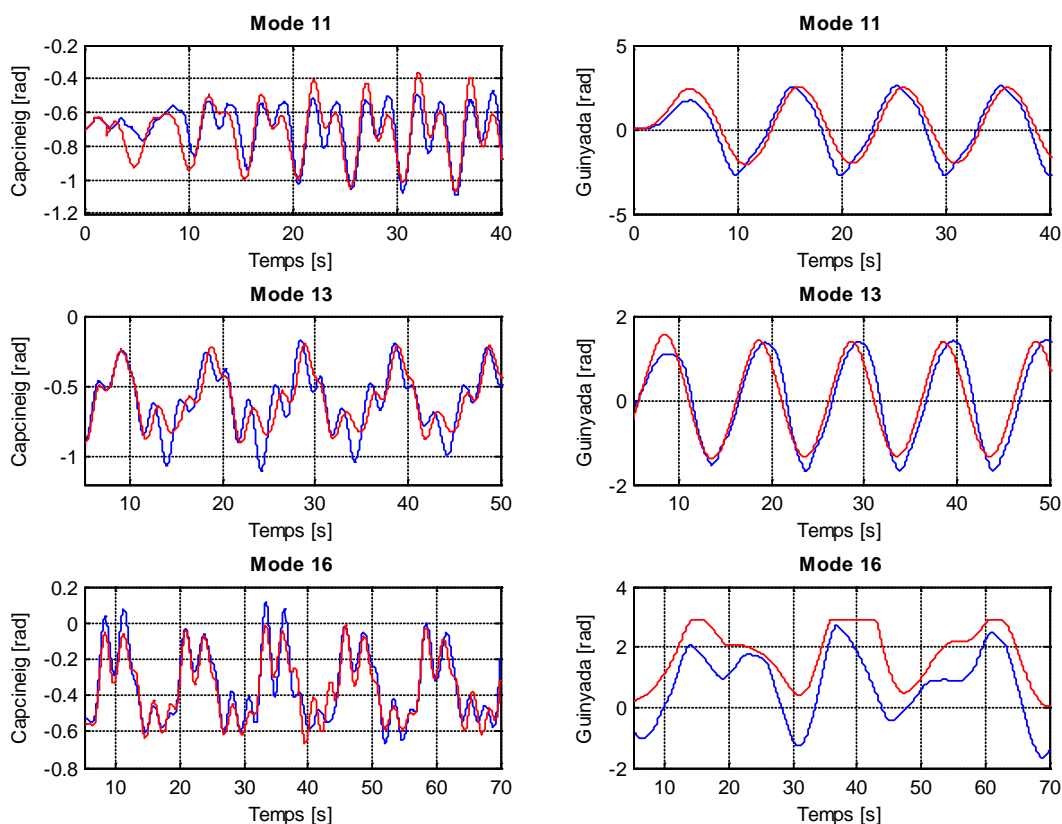
Mode	Entrada rotor principal				Entrada rotor de cua			
	Senyal	Freq [Hz]	Amp[V]	DC	Senyal	Freq [Hz]	Amp[V]	DC
1	Sinus	0,5	1	0	Sinus	0,5	0,5	0
7	Sinus	0,5	1,5	0	Sinus	0,05	0,75	0
8	Sinus	1	2,5	0	Sinus	0,1	1,5	0
11	Sinus	0,8	1,5	0	Sinus	0,1	1,3	0
13	Quadrat	0,1	1	0	—	—	—	—
16	Quadrat	0,08	0,5	1	Quadrat	0,05	0,5	0

**Taula 4.21** Modes d'excitació dels motors per a la validació global



**Figura 4.48** Respostes del model (en vermell) i del TRMS (en blau) a les entrades dels modes 1, 7 i 8

En la Figura 4.48 i Figura 4.49 es pot veure la comparativa entre els senyals capturats en el TRMS i la sortida del model global a les anteriors entrades.



**Figura 4.49** Respostes del model (en vermell) i del TRMS (en blau) a les entrades dels modes 11, 13 i 16

El model global ofereix bons resultats en l'angle de capcineig quan s'excita el motor principal amb qualsevol amplitud dins del marge permès ( $\pm 2,5$  V), tot i que els millors resultats són per a amplituds entorn a 1–1,5 V. Pel que fa a l'angle de guinyada, amplituds excessivament altes per al rotor de cua ( $\pm 2$  ó  $\pm 2,5$  V) saturen el model portant-lo al límit físic. En aquest cas, el model simula millor la resposta una amplitud *puntual* elevada (guinyada dels modes 8 i 11), que no pas a una amplitud *constant* per un període de temps, encara que sigui menor (mode 16). Noteu com clarament les amplituds dels diferents modes són menors en el motor de cua en la Taula 4.21, ja que la posició de guinyada és altament sensible i la mínima propulsió implica un desplaçament de guinyada important.

El model global funciona força bé en un ample de banda que està entorn a 1 Hz per al motor principal, i 0,5 Hz per al motor de cua. En concret, per a freqüències altes (0,5–1 Hz), el model és força precís en l'angle de capcineig (vegeu respostes dels modes 1, 7, 8 i 11), però en la guinyada. Podem considerar que per al motor de cua, una freqüència de 0,5 Hz ja és massa alta i apareixen no-linealitats. El model és prou bo com per simular la freqüència fonamental, però apareix un efecte d'atenuació de l'amplitud que no es

correspon amb la realitat (vegeu la guinyada del mode 1). Tanmateix, el model respon adequadament a les freqüències més baixes. Les captures del mode 8 i 11 són representatives d'allà on el model obtingut treballa més còmodament: l'angle de capcineig pot arribar sense problemes fins a 1 Hz, mentre que el de guinyada respon molt bé al voltant dels 0,1 Hz.

Els senyals quadrats del mode 16 permeten excitar més harmònics i mostren com el model no lineal és prou bo com per detectar-los en la resposta de capcineig. Per contra, en el moviment horitzontal el model global detecta bé la freqüència fonamental, però no és precís en copsar els harmònics. En qualsevol cas, un model més precís per al moment dels cables del pla horitzontal implicaria amb tota seguretat una millora important en el model global.

Les captures del mode 13 demostren el concepte de la conservació angular, explicat el apartats anteriors. Malgrat que en el motor de cua no hi ha aplicada cap entrada, el moviment de guinyada sí que hi és present. El senyal quadrat aplicat en el motor principal, fa que aquest giri contínuament en un sentit o cap a un altre, canviant així el pla de rotació del motor principal, fet que fa aparèixer un *contramoment* angular en el sistema global que contraresta el del motor principal per tal que es conservi. La conseqüència d'això és la rotació en el pla horitzontal, tot i que el motor que excita aquest moviment està apagat.

## Capítol 5. Conclusions

En aquest projecte s'ha abordat l'obtenció del model matemàtic d'un helicòpter de laboratori capaç de simular de manera detallada i precisa el seu comportament dinàmic. L'equip en qüestió és el *Twin Rotor MIMO System* de Feedback Instruments Ltd. Aquest equipament és una aplicació de referència dins l'àmbit de l'enginyeria de control, tant en la seva vessant de modelització com en la del disseny de controladors i, per aquest motiu, hi ha un gran nombre de treballs, articles i tesis dedicats al seu estudi.

Malgrat l'abundància de referències bibliogràfiques, les diferents configuracions que pot prendre l'equip i les successives versions subministrades pel fabricant, és possible que els models publicats puguin no ajustar-se prou bé a cada equip en concret. Aquest ha estat el nostre cas, i això ha fet patent la necessitat d'obtenir un model propi per a l'equip del laboratori de SEC. Les grans diferències amb els treballs publicats i les dificultats que han anat apareixent en la construcció del model ens han fet optar per reportar de manera molt detallada els diferents passos seguits i les opcions escollides, ja que l'objectiu del present projecte és proporcionar un model prou bo i complet que permeti la recerca en l'àmbit del disseny de controladors d'altres prestacions.

Pel que fa al procediment seguit, les principals conclusions que podem extreure són les següents:

- En la fase de modelització analítica ha estat necessari un profund estudi dels conceptes de mecànica rotacional que governen el moviment de l'helicòpter, amb especial atenció a les forces fictícies i al moment giroscòpic. En concret, tots els articles esmentats en l'apartat 1.3 parteixen de models que no han estat suficientment justificats, fet pel qual calia una revisió d'alguns conceptes.
- També s'ha vist que el model no pot considerar-se com dos submodels aïllats, un per a cada angle de sortida. És patent l'important acoblament existent, especialment la influència que el rotor principal exerceix sobre el moviment horitzontal.
- Les equacions (3.60) a (3.67) són el resultat d'aquesta primera fase de construcció. Són equacions diferencials no lineals i acoblades en les quals el valor d'alguns paràmetres, com per exemple els coeficients de fricció, presentaven un elevat grau d'incertesa ja que no disposàvem d'eines adequades per a la seva mesura. Això ha fet necessari portar a terme una identificació experimental per tal d'ajustar els seus valors.

- En la fase d'identificació experimental s'ha dividit tot el procés en diverses etapes, que han permès aïllar diferents parts del sistema i poder ajustar els paràmetres de les equacions en què es basen. S'ha pogut copsar que el procés d'identificació no és gens metòdic, sinó que és un art d'anar construint poc a poc, pas a pas, intuït, modelant (que no modelitzant!) els experiments en els quals totes les eines que l'enginyer tingui al seu abast són benvingudes.
- Per tal d'obtenir la màxima informació possible del sistema i poder capturar els senyals adequats, ha estat necessari modificar el programari per accedir als senyals dels tacòmetres de cada motor i poder així fer mesures *internes*. A diferència de versions més antigues del TRMS, això no era possible per defecte de fàbrica en el nostre aparell. A més, la utilització d'un tacòmetre òptic de mà, un nivell i falques de fusta ha aportat més informació rellevant per a la identificació.
- Tot i que s'han temptejat diversos mètodes numèrics per resoldre la optimització (apartat 4.2.4), són el mètode de Levenberg-Marquardt y el *Pattern search* els que, a la pràctica, s'han utilitzat. Ambdós són mètodes d'optimització local, tot i que el PS també pot ser considerat com un mètode global gràcies a les diferents direccions de cerca que ofereix. Durant tots els experiments ha quedat palesa la lenta convergència i l'alt cost computacional del PS enfront del LM, malgrat oferir tots dos resultats molt similars.
- La possibilitat de quedar atrapats en falses solucions que corresponen a mínims locals s'ha evitat fent ús d'estrictes estimacions matemàtiques així com també del mètode de prova i error. Una selecta tria de valors inicials és molt important per tal de trobar el mínim global o, en el seu defecte, un bon mínim local.
- El resultat de les dues fases de la construcció del model, la modelització i la identificació, és un model de blocs SIMULINK que representa la dinàmica completa del prototip d'helicòpter. Aquest model ha estat testejat i validat mitjançant diversos experiments..

Quant al model final obtingut, les principals conclusions que en podem extreure són les següents:

- Els models dels motors, tant del rotor principal com del de cua, són molt acurats, especialment en el marge de freqüències 0–0,6 Hz.
- El model del moviment en el pla vertical també és molt acurat gràcies en gran part a la precisa modelització del moment de la gravetat i del de la fricció. Tant en règim transitori com en el permanent, en un marge de freqüències al voltant de 0–0,6 Hz per a l'entrada del motor principal, el model es comporta satisfactòriament, i sense problemes d'amplitud. La influència del rotor de cua sobre el moviment vertical és pràcticament menyspreable.



- El model del moviment en el pla horitzontal té algunes deficiències gràcies en part a la senzilla modelització del moment dels cables, que és un efecte difícil d'analitzar. Això afecta al model del pla horitzontal i, per tant, també al model global. Val a dir que un model més precís per al moment dels cables implicaria amb tota seguretat una millora important en el model global. Malgrat això, el model obtingut pot seguir freqüències per al rotor de cua de fins a 0,5 Hz, on comencen a aparèixer no-linealitats de forma evident. La influència del rotor principal sobre el moviment horitzontal és molt notable i amb la qual es pot observar que es compleix el fenomen de la conservació del moment angular.
- Ambdós models de les influències creuades han estat modificats respecte als suggerits per Rahideh i Shaheed (2007, 2008a). En aquests treballs modelitzen aquestes dinàmiques com una velocitat angular (de capcineig o de guinyada, segons sigui el pla) que s'addiciona a la velocitat angular que ja té l'aparell en aquell pla. En canvi, en aquest projecte s'ha modelitzat aquesta influència com un moment de força més en cada pla, fet que és més realista tal com apunten els treballs de laboratori duts a terme.
- A nivell global, el marge de freqüències on el model es comporta millor és 0–1 Hz per a l'entrada principal i 0–0,5 Hz per a l'entrada de cua. Quant a amplitud, l'entrada principal accepta a la perfecció senyals compresos en tot el marge permès ( $\pm 2,5$  V), essent l'entrada òptima entorn a  $\pm 1$  V. En canvi, les entrades per al rotor de cua no haurien de superar  $\pm 1$  V, sobretot si són constants. Aquests marges de validesa són coherents amb els diversos treballs consultats i caldrà tenir-los en compte a l'hora de dissenyar els controladors d'altres prestacions.

Finalment, les línies futures de treball amb aquest equip passen per abordar el disseny de diferents controladors avançats, com són els robustos, els adaptatius i predictius, així com també diferents mètodes d'implementació com ara l'ús de xarxes neuronals.



## Bibliografia i referències

### Bibliografia

AFRUZ, J.; ALAM M.S. (2010). Non-linear Modeling of a Twin Rotor System Using Particle Swarm Optimization. En *Proceedings of the International Computer Symposium, ICS* (p. 1026-1032)

AHMAD, S.M.; CHIPPERFIELD, A.J.; TOKHI, M.O. (2000a). Modelling and Control of a Twin Rotor Multi-Input Multi-Output System. En *Proceedings of the American Control Conference*, Chicago.

– (2000b). Dynamic Modelling and Control of a 2 DOF Twin Rotor Multi-Input Multi-Output System. En *Proceedings of the IEEE 26<sup>th</sup> Annual Conference on Industrial Electronics Society, IECON* (p. 1451-1456).

– (2000c). Dynamic Modelling and Optimal Control of a Twin Rotor MIMO System. En *Proceedings of the IEEE National Aerospace and Electronics Conference, NAECON* (p.391-398)

– (2001). Parametric modelling and dynamic characterization of a two-degree-of-freedom twin-rotor multi-input multi-output system. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part G: Journal of Aerospace Engineering*, 215(2), p.63-78.

– (2002). Dynamic modelling and open-loop control of a twin rotor multi-input multi-output system. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part I: Journal of Systems and Control Engineering*, 216(6), p.477-496.

– (2003). Dynamic modelling and linear quadratic Gaussian control of a twin-rotor multi-input multi-output system. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part I: Journal of Systems and Control Engineering*, 217(1), p.203-227.

– (2004). Dynamic Modelling and Open-Loop Control of a Two-Degree-of-Freedom Twin-Rotor Multi-Input Multi-Output System. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part I: Journal of Systems and Control Engineering*, 218, p.451–463.

AHMAD, S.M. [et al.] (2000). Nonlinear Modelling of a Twin Rotor MIMO System Using Radial Basis Function Networks. En *Proceedings of the IEEE National Aerospace and Electronics Conference, NAECON* (p.313-320).

– (2002). Non-linear modelling of a one-degree-of-freedom twin-rotor multi-input multi-output system using radial basis function networks. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part G: Journal of Aerospace Engineering*, 216(4), p.197–208.

AHMED, Qadeer (2009). *Robust control algorithms for twin rotor system* [En línia]. Islamabad: Muhammad Ali Jinnah University. Faculty of Engineering and Applied Sciences [Projecte fi de màster]. Disponible a Internet: < <http://www.visualcv.com/qadeerahmed> > [Consulta: 7 març 2011]

AHMED, Q.; BHATTI, A.I.; IQBAL, S. (2009a). Robust Decoupling Control Design for the Twin Rotor System using Hadamard Weights. En *Proceedings of the IEEE International Conference on Control Applications, CCA* (p. 1009-1014), Sant Petersburg.

– (2009b). Nonlinear Robust Decoupling Control Design for Twin Rotor System. En *Proceedings of the 7<sup>th</sup> Asian Control Conference, ASCC* (p. 937-942), Hong Kong.

AHMED, Q. [et al.] (2010). 2-Sliding Mode based Robust Control for 2-DOF Helicopter. En *Proceedings of the 11<sup>th</sup> IEEE Workshop on Variable Structure Systems* (p.481–486), 26-28 juny, Ciutat de Mèxic.

ALAM, M.S.; TOKHI, M.O. (2007). Modelling of a twin rotor system: a particle swarm optimization approach. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part G: Journal of Aerospace Engineering*, 221(3), p.353-375.

ALDEBREZ, F.M.; DARUS, I.Z.M.; TOKHI, M.O. (2004). Dynamic modelling of a twin rotor system in hovering position. En *Proceedings of the First International Symposium on Control, Communications and Signal Processing* (p.823-826), 21-24 març.

AMIR, M.Y.; ABBASS, V. (2008). Modeling of Quadrotor Helicopter Dynamics. En *Proceedings of the International Conference on Smart Manufacturing Application, ICSMA* (p.100-105), 9-11 abril, Gyeong gi-do (Corea del Sud).

BALDERUD, Jonas (2002). *Modelling and control of a toy-helicopter*. Karlstad (SUE): Karlstad University. Department of Electrical Engineering [Projecte fi de màster].

BEACHLEY, Norman H.; HARRISON, Howard L. (1978). *Introduction to Dynamic System Analysis*. Nova York: Harper & Row.

BEER, Ferdinand P. [et al.] (2005). *Mecánica vectorial para ingenieros. Dinámica*. 7a ed. Ciutat de Mèxic.: McGraw-Hill Interamericana.

- BELL, Trudy E.; DOOLING, Dave; FOUKE, Janie [ed.] (2000). *Engineering tomorrow: today's technology experts envision the next century*. Nova York: IEEE Press.
- BJÖRCK, Ake (1996). *Numerical methods for least squares problems*. Filadèlfia: Society for Industrial and Applied Mathematics.
- BRAIN, Marshall (2000). *How Helicopters Work* [En línia]. Disponible a Internet: <<http://science.howstuffworks.com/transport/flight/modern/helicopter.htm>> [Consulta: 15 juliol 2010].
- BRAMWELL, A. R. S.; DONE, George; BALMFORD, David (2001). *Bramwell's Helicopter Dynamics*. 2a ed. Reston, (EUA): American Institute of Aeronautics and Astronautics.
- CENTRE NATIONALE DE RESSOURCES TEXTUELLES ET LEXICALES (2009). *CNRTL Etymologie* [En línia]. Disponible a Internet: <<http://www.cnrtl.fr/etymologie>> [Consulta: 31 març 2011].
- CHRISTENSEN, Rolf [et al.] (2006). *Modelling and Control of a Twin-Rotor MIMO System* [En línia]. Aalborg (DIN): Aalborg University. Faculty of Engineering and Science [Projecte fi de màster]. Disponible a Internet: <<http://kom.aau.dk/~msje04/uni/6sem/report.pdf>> [Consulta: 1 juliol 2010].
- CLOSE, Charles M.; FREDERICK, Dean K. (1978). *Modeling and analysis of dynamic systems*. Boston: Houghton Mifflin Company.
- COLEMAN, Thomas F.; LI, Yuying (1994). On the convergence of interior-reflective Newton methods for nonlinear minimization subject to bounds. *Mathematical programming*, 67, p.189–224.
- (1996). An interior trust region approach for nonlinear minimization subject to bounds. *Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM) Journal on Optimization*, 6(2), p.418–445.
- CUERVA, Álvaro [et al.] (2009). *Teoría de los helicópteros*. Madrid: ETSI Aeronáuticos UPM.
- DAVIES, W.D.T. (1970). *System identification for self-adaptive control*. Londres: Wiley-Interscience.
- DARUS, I.Z.M.; ALDEBREZ F.M.; TOKHI M. O. (2004). Parametric Modelling of a Twin Rotor System Using Genetic Algorithms. En *Proceedings of the First International Symposium on Control, Communications and Signal Processing* (p. 115-118).
- DENNIS, John E.; SCHNABEL, Robert B. (1996). *Numerical methods for unconstrained optimization and nonlinear equations*. Filadèlfia: Society for Industrial and Applied Mathematics.

DERAFA, L.; MADANI, T.; BENALLEGUE, A. (2006). Dynamic Modelling and Experimental Identification of Four Rotors Helicopter Parameters. En *Proceedings of the IEEE International Conference on Industrial Technology, ICIT* (p.1834-1839 ), 15-17 desembre.

DERAFA, L. [et al.] (2010). Super Twisting Control Algorithm for the Four Rotors Helicopter Attitude Tracking Problem. En *Proceedings of the 11<sup>th</sup> International Workshop on Variable Structure Systems* (p.62-67), 26-28 juny, Ciutat de Mèxic.

DRAPER, N.R.; SMITH, H. (1981). *Applied Regression Analysis*. 2a ed. Nova York: Wiley.

DUTTON, Ken; THOMPSON, Steve; BARRACLOUGH, Bill (1997). *The art of control engineering*. Harlow (RU): Addison-Wesley.

ERGINER, B.; ALTUG, E. (2007). Modeling and PD Control of a Quadrotor VTOL Vehicle. En *Proceedings of the IEEE Intelligent Vehicles Symposium* (p.894-899), 13-15 juny, Istanbul.

ESPUGA, Marc (2011). *Modelización y control LPV de un helicóptero a dos grados de libertad*. [En línia]. Barcelona: UPC. Escola Tècnica Superior d'Enginyeries Industrial i Aeronàutica de Terrassa. [Projecte fi de carrera]. Disponible a Internet: < <http://hdl.handle.net/2099.1/11574> > [Consulta: 15 desembre 2011].

EYKHOFF, Pieter (1974). *System identification: parameter and state estimation*. Londres: Wiley-Interscience.

FEEDBACK INSTRUMENTS LTD. (1998a). *Twin Rotor MIMO System: Reference Manual* (33-007-2M5). Crowborough (RU).

– (1998b). *Twin Rotor MIMO System: Advanced Teaching Manual 1* (33-007-4M5). Crowborough.

– (2006a). *Twin Rotor MIMO System: Control Experiments* (33-949S). Crowborough (RU).

– (2006b). *Matlab guide for Feedback Control Instrumentation* (33-000-V73). Crowborough (RU).

– (2009). *Twin Rotor MIMO System: Installation & Commissioning* (33-949IC). Crowborough (RU).

FIELD, Matthew (2006). *Los Angeles Police Department (LAPD) Bell 206 Jetranger helicopter* [Fotografia] Disponible a Internet:<[http://es.wikipedia.org/wiki/Archivo:LAPD\\_Bell\\_206\\_Jetranger.jpg](http://es.wikipedia.org/wiki/Archivo:LAPD_Bell_206_Jetranger.jpg)> [Consulta: 21 setembre 2011]

FRANKLIN, Gene F.; POWELL, J. David; EMAMI-NAEINI, Abbas (1991). *Control de sistemas dinámicos con retroalimentación*. Wilmington (EUA): Addison-Wesley Iberoamericana.

GABRIEL, Christoph (2008). *Modelling, simulation and control of a Twin Rotor MIMO-System*. València: Universitat Politècnica de València. Departament d'Enginyeria de Sistemes i Automàtica [Projecte fi de carrera].

GETTYS, W. Edward; KELLER, Frederick J.; SKOVE, Malcolm J. (1991). *Física clásica y moderna*. Madrid: McGraw-Hill Interamericana de España.

GILL, Philip E.; MURRAY, Walter (1976). Nonlinear least squares and nonlinearly constrained optimization. In: WATSON, G. Alistair [ed.] (1976). *Numerical Analysis: Proceedings on the Dundee Conference on Numerical Analysis, 1975*. Berlín: Springer, p.134–147.

GILL, Philip E.; MURRAY, Walter; WRIGHT, Margaret H. (1981). *Practical optimization*. Londres: Academic Press.

GODFREY, Keith [ed.] (1993). *Perturbation Signals for System Identification*. Hemel Hempstead (RU): Prentice-Hall.

GUENARD, N.; HAMEL, T.; MOREAU, V. (2005). Dynamic Modeling and Intuitive Control Strategy for an “X4-flyer”. En *Proceedings of the IEEE International Conference on Control and Automation, ICCA* (p.141-146), 27-29 juny, Budapest.

JONWITHNOH (2007). *Air & Space 18A at Houston, TX 2007* [Fotografia]. Disponible a Internet: <[http://en.wikipedia.org/wiki/File:Air\\_Space\\_18A.JPG](http://en.wikipedia.org/wiki/File:Air_Space_18A.JPG)> [Consulta: 21 setembre 2011]

JUANG, J.G.; LIU, W.K.; TSAI, C.Y. (2005). Intelligent Control Scheme for Twin Rotor MIMO System. En *Proceedings of the IEEE International Conference on Mechatronic, ICM* (p. 102-107), 10-12 juliol, Taipei.

JUANG, J.G.; TU, K.T.; LIU, W.K. (2006). Optimal Fuzzy Switching Grey prediction with RGA for TRMS Control. En *Proceedings of the IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics* (p. 681-686), 8-11 octubre, Taipei.

KNUDSEN, Morten (2004). *Experimental modelling of dynamic systems* [En línia]. Aalborg (DIN): Aalborg University. Department of Control Engineering [No publicat]. Disponible a Internet: <<http://www.control.aau.dk/~mk/ExpMod/Publicdoc/LectureNote02pdf.pdf>> [Consulta: 5 juliol 2010].

LANDAU, Ioan D.; ZITO, Gianluca (2006). *Digital control systems: design, identification and implementation*. Londres: Springer.

LANZA, Pablo (2009). *Un helicóptero CH-47D Chinook del Ejército español de tierra* [Fotografia]. Disponible a Internet: <[http://es.wikipedia.org/wiki/Archivo:CH-47D\\_Chinook\\_spanish\\_army\\_%28cropped%29.jpg](http://es.wikipedia.org/wiki/Archivo:CH-47D_Chinook_spanish_army_%28cropped%29.jpg)> [Consulta: 21 setembre 2011]

LIU, T.K.; JUANG, J.G. (2009). A Single Neuron PID Control for Twin Rotor MIMO System. En *Proceedings of the IEEE/ASME International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics, AIM* (p.186-191), 14-17 juliol, Singapur.

LJUNG, Lennart (1994). From Data to Model: A Guided Tour. In Institution of Engineering and Technology. *International Conference on Control*, 1, p.422–430, 21–24 març.

– (1999). *System identification: theory for the user*. 2a ed. Upper Saddle River (EUA): Prentice-Hall.

– (2008). Perspectives on System Identification. En *Proceedings of the 17th IFAC World Congress*, 6–11 juliol, Seül.

– (2010a). *System Identification Toolbox 7: user's guide*. Natick (EUA): The Mathworks, Inc.

– (2010b). Approaches to Identification of Nonlinear Systems. En *Proceedings of the 29th Chinese Control Conference* (p.1–5), 29–31 juliol, Pequín.

MCKERROW, P (2004). Modelling the Draganflyer Four-Rotor Helicopter. En *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation* (p.3596-3601), Nova Orleans.

MILENA, Juan Carlos (2010). *Control lineal y no lineal de un levitador magnético. Estudio comparativo* [En línia]. Barcelona: UPC. Escola Tècnica Superior d'Enginyeria de Telecomunicació de Barcelona [Projecte fi de carrera]. Disponible a Internet: <<http://hdl.handle.net/2099.1/9923>> [Consulta: 15 setembre 2011].

MORÉ, Jorge J. (1978). The Levenberg-Marquardt algorithm: implementation and theory. En: WATSON, G. Alistair [ed.] (1978). *Numerical Analysis: Proceedings of the Biennial Conference Held at Dundee, 1977*. Berlín: Springer, p.105–116.

NEJJARI, Fatiha [et al.] (2011a). LPV modelling and control of the Twin Rotor MIMO System. In *Proceedings of the 19th Mediterranean Conference on Control and Automation* (p.1082–1087), 20–23 juny, Corfú (GR).

– (2011b). LPV modelling and experimental non-linear identification of the Twin Rotor MIMO System. En *50<sup>th</sup> IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference (submitted)*, 11–15 desembre, Orlando (EUA).



NELLES, Oliver (2001). *Nonlinear system identification: from classical approaches to neural networks and fuzzy models*. Berlín: Springer.

NOCEDAL, Jorge; WRIGHT, Stephen J. (2006). *Numerical Optimization*. 2a ed. Nova York: Springer.

PAUMIER, Guillaume (2007). *Autogyro MT03* [Fotografia]. Disponible a Internet: <[http://ca.wikipedia.org/wiki/Fitxer:Autogyro\\_MT03\\_-\\_AirExpo\\_Muret\\_2007\\_0111\\_2007-05-12.jpg](http://ca.wikipedia.org/wiki/Fitxer:Autogyro_MT03_-_AirExpo_Muret_2007_0111_2007-05-12.jpg)> [Consulta: 21 setembre 2011].

PHYSIKALISCH-TECHNISCHE BUNDESANSTALT (2007). *Gravity Information System (SIS)* [En línia]. Disponible a Internet: <<http://www.ptb.de/cartoweb3/SISproject.php>> [Consulta: 28 setembre 2011].

PINTELON, Rik; SCHOUKENS, Johan (2001). *System identification: a frequency domain approach*. Nova York: IEEE Press.

RAHIDEH, A.; SHAHEED, M.H. (2006). Hybrid Fuzzy-PID-based Control of a Twin Rotor MIMO System. En *Proceedings of the 32<sup>nd</sup> Annual Conference on IEEE Industrial Electronics, IECON* (p.48-53).

– (2007). Mathematical dynamic modelling of a twin-rotor multiple input–multiple output system. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part I: Journal of Systems and Control Engineering*, 221(1), p.89–101.

– (2008a). Dynamic modelling of a twin rotor MIMO system using grey box approach. En *Proceedings of the 5th International Symposium on Mechatronics and its Applications (ISMA08)* (p.1–6).

– (2008b). Neural network-based modeling of a two-degrees-of freedom twin rotor multiple input, multiple output system using conjugate gradient learning algorithms. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part G: Journal of Aerospace Engineering*, 222(6), p.757-771

– (2009a). Real Time Hybrid Fuzzy-PID Control of a Twin Rotor System. En *Proceedings of the IEEE International Conference on Mechatronics, ICM* (p. 1-6), Màlaga.

– (2009b). Robust Model Predictive Control of a Twin Rotor MIMO System. En *Proceedings of the IEEE International Conference on Mechatronics, ICM* (p. 1-6), Màlaga.

RAHIDEH, A.; SHAHEED, M.H., BAJODAH, A.H. (2007). Adaptive non-linear model inversion control of a twin rotor multi-input multi-output system using artificial intelligence. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part G: Journal of Aerospace Engineering*, 221(3), p.343–351.

- RAHIDEH, A.; SHAHEED, M.H.; HUIJBERTS, H.J.C. (2008). Dynamic modelling of a TRMS using analytical and empirical approaches. *Control Engineering Practice*, 16(3), p.241–259.
- ROED, Aage (1995). Traduït per Luís Manuel Pérez Llera. *Aerodinámica y actuaciones del helicóptero: Vuelo seguro, estabilidad y control, vuelo sobre montañas, cargas y sobrecargas, seguridad* [Safe Helicopter flight]. Madrid: Paraninfo.
- SÖDERSTRÖM, Torsten; STOICA, Petre (1989). *System identification*. Hemel Hempstead (RU): Prentice-Hall.
- SUBUDHI, B. (2009). Nonlinear System Identification of a Twin Rotor MIMO System. En *Proceedings of the IEEE Region 10 Conference TENCN* (p. 1-6).
- THE MATHWORKS INC. (2005a). *Optimization Toolbox 3 for use with MATLAB: user's guide*. Natick (EUA).
- (2005b). *Curve Fitting Toolbox 1: user's guide*. Natick (EUA).
- (2010). *Optimization Toolbox 5: user's guide*. Natick (EUA).
- (2011a). *Global Optimization Toolbox 3: user's guide*. Natick (EUA).
- (2011b). *Simulink Design Optimization 1: user's guide*. Natick (EUA).
- TIPLER, Paul A.; MOSCA, Gene (2005a). *Física para la ciencia y la tecnología*. Vol. I. 5a ed. Barcelona: Reverté.
- (2005b). *Física para la ciencia y la tecnología*. Vol. II. 5a ed. Barcelona: Reverté.
- TOHA, S. F.; TOKHI, M.O. (2010). Parametric modelling application to a twin rotor system using recursive least squares, genetic, and swarm optimization techniques. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part G: Journal of Aerospace Engineering*, 224(9), p.961-977.
- TRIANTAFYLLOPOULOS, K. [et al.] (2009). Bayesian dynamic modelling and tracking control for flexible manoeuvring systems. En *Proceedings of the 3<sup>rd</sup> International Conference on Signals, Circuits and Systems, SCS* (p. 1-6).
- UDIPROD (2007). *Visualization of the Coriolis and centrifugal forces* [Vídeo en línia]. Disponible a Internet: <<http://www.youtube.com/watch?v=49JwbrXcPjc>> [Consulta: 23 març 2011].

U.S. DEPARTMENT OF TRANSPORTATION (2006). Traduït per José Diego Pereña. *Manual básico de helicópteros* [Basic Helicopter Handbook]. 3a ed. Madrid: Thomson-Paraninfo.

XU, F.; LI, Z. (2010). Testinc & Simulation of Disturbance Torque Caused by Cables in Acquisition, Tracking & Pointing System. En *Proceedings of the 2010 IEEE International Conference on Mechatronics and Automation*, 4–7 agost, Xian (Xina).

## Altres referències bibliogràfiques

ANGLIA RUSKIN UNIVERSITY LYBRARY (2010). *Guide to the Harvard Style of Referencing* [En línia]. 2a ed. Cambridge: Anglia Ruskin University. Disponible a Internet: <[http://libweb.anglia.ac.uk/referencing/files/Harvard\\_referencing\\_2010.pdf](http://libweb.anglia.ac.uk/referencing/files/Harvard_referencing_2010.pdf)> [Consulta: 1 març 2011]

ENCICLOPÈDIA CATALANA, SAU (2010). *L'Enciclopèdia* [En línia]. Disponible a Internet: <<http://www.enciclopedia.cat>>

INSTITUT D'ESTUDIS CATALANS (2007). *Diccionari de la llengua catalana* [En línia]. 2a ed. Disponible a Internet: <<http://dlc.iec.cat>>.

LAROUSSE EDITORIAL (2008). *Diccionaris en català: diccionari català-castellà, català-anglès, català-francès i sinònims* [En línia]. Disponible a Internet: <<http://www.diccionaris.cat>>.

MOLL, Francesc de B. (1987). *Diccionari castellà-català*. 6a ed. Palma de Mallorca: Moll.

MOLL, Francesc de B. (1989). *Diccionari català-castellà*. 7a ed. Palma de Mallorca: Moll.

REAL ACADEMIA ESPAÑOLA (s/d). *Diccionario de la lengua española* [En línia]. Disponible a Internet: <<http://buscon.rae.es/draeI>>.

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA. SERVEI DE LLENGÜES I TERMINOLOGIA (1996a). *Guia lingüística pràctica 1. Dubtes lingüístics més freqüents*. Barcelona.

– (1996b). *Guia lingüística pràctica 2. Convencions gràfiques*. Barcelona.

– (1996c). *Guia lingüística pràctica 3. Disseny i elaboració de materials docents*. Barcelona.

– (1998). *Guia lingüística pràctica 4. Recursos i obres de consulta*. Barcelona.

– (s/d). *Diccionari d'aeronàutica i espai* [En línia]. Disponible a Internet: <<http://www.upc.edu/slt/aeronautica>>



## Llistat de figures

<b>Figura 2.1</b> Diferents tipus d'aeronaus d'ales giratòries.....	6
<b>Figura 2.2</b> Perfils d'ala: a) caires, corda i vent relatiu; b) angle de pas i angle d'atac .....	7
<b>Figura 2.3</b> (Esquerra) Principi de Bernoulli: l'augment de la velocitat produeix una disminució de la pressió en un estrenyiment de la canalització; (dreta) la sustentació d'un perfil es produeix per una disminució de la pressió en la part superior del perfil i un augment de la pressió en la part inferior (U.S. Department of Transportation 2006).....	8
<b>Figura 2.4</b> Corba de sustentació d'un perfil d'ala en funció de l'angle d'atac.....	9
<b>Figura 2.5</b> Moviments de les pales d'un helicòpter .....	10
<b>Figura 2.6</b> Forces que actuen en l'helicòpter en diferents situacions de vol per l'acció del rotor principal.....	11
<b>Figura 2.7</b> La tracció del rotor de cua compensa l'efecte del parell de reacció del rotor principal.....	12
<b>Figura 2.8</b> Principi de precessió giroscòpica (Roed 1995).....	12
<b>Figura 2.9</b> El disc rotor actua com un giroscopi. Quan s'efectua un canvi de pas en una pala del rotor, la màxima reacció té lloc aproximadament 90° després en el sentit de gir. ....	13
<b>Figura 2.10</b> Comparativa entre les velocitats de la pala que avança i la que retrocedeix respecte al vent relatiu en vol estacionari i en vol cap endavant .....	14
<b>Figura 2.11</b> La conicitat és el resultat de les forces de sustentació i centrífuga .....	15
<b>Figura 2.12</b> Esquema dels diferents sistemes de rotor principal (Cuerva 2009) .....	15
<b>Figura 2.13</b> Comandaments de l'helicòpter i funció principal de cadascun d'ells .....	16
<b>Figura 2.14</b> Angle de pas i tracció del rotor de cua en relació amb la posició dels pedals .....	18
<b>Figura 2.15</b> Relació entre la posició de la palanca de cíclic, la inclinació del disc del rotor i el moviment de l'helicòpter .....	18
<b>Figura 2.16</b> Control de la sustentació i de la tracció del rotor principal (Roed 1995).....	19
<b>Figura 2.17</b> Eixos, moviments i estabilitat d'un helicòpter (Roed 1995).....	20
<b>Figura 3.1</b> El prototip d'helicòpter <i>Twin Rotor MIMO System</i> als peus de la Serra Major del Montsant (Priorat) ..	23
<b>Figura 3.2</b> Twin Rotor MIMO System (TRMS) en la posició de treball .....	24
<b>Figura 3.3</b> Angles màxims i mínims del TRMS en els plans horitzontal i vertical .....	25
<b>Figura 3.4</b> Unitat elèctrica del TRMS.....	26
<b>Figura 3.5</b> Esquema del sistema de control del TRMS .....	27
<b>Figura 3.6</b> Blocs SIMULINK d'interacció amb el TRMS: a) <i>Analog Input</i> (rotor principal i rotor de cua) b) <i>Feedback Encoder</i> ; c) <i>Feedback DAC</i> .....	28
<b>Figura 3.7</b> Equip de laboratori utilitzat en el present projecte .....	28
<b>Figura 3.8</b> Diagrama de blocs de l'estratègia en la modelització del TRMS .....	31
<b>Figura 3.9</b> Diagrama de blocs SIMULINK de l'etapa preliminar del TRMS.....	32
<b>Figura 3.10</b> Equivalent elèctric del motor CC.....	35
<b>Figura 3.11</b> Diagrama de blocs del sistema no lineal d'un motor CC amb fricció aerodinàmica .....	37
<b>Figura 3.12</b> Sistemes de referència utilitzats, pla horitzontal i pla vertical.....	40

<b>Figura 3.13:</b> Model de fregament (sense contemplar l'amortiment aerodinàmic): a) Ideal; b) Aproximat (per a diferents factors de suavitat).....	44
<b>Figura 3.14</b> Forces gravitacionals en el pla vertical actuant al TRMS .....	46
<b>Figura 3.15</b> Les forces centrífugues actuant en el TRMS.....	48
<b>Figura 3.16</b> Aproximació lineal del moment de força del cable.....	54
<b>Figura 3.17</b> Diagrama de blocs SIMULINK del model global .....	60
<b>Figura 4.1</b> El procés d'identificació experimental segons Ljung (1999).....	62
<b>Figura 4.2</b> <i>Control and Estimation Tools Manager (MATLAB 7.11)</i> .....	67
<b>Figura 4.3</b> Full de ruta del procediment d'identificació experimental.....	77
<b>Figura 4.4</b> Diagrama de blocs SIMULINK per a la identificació dels paràmetres del motor de cua .....	78
<b>Figura 4.5</b> Captures en el tacòmetre del motor de cua.....	80
<b>Figura 4.6</b> Captures amb el tacòmetre òptic de la velocitat de les pales del motor de cua en funció de la resposta de cada graó en RP .....	80
<b>Figura 4.7</b> Captures de la velocitat de les pales del motor de cua en funció de cada graó.....	81
<b>Figura 4.8</b> Captures del tacòmetre de cua després del processament.....	82
<b>Figura 4.9</b> Respostes al graó d'1 V del motor de cua i del seu model.....	83
<b>Figura 4.10</b> Respostes del motor de cua i del seu model a graons de diferent amplitud.....	84
<b>Figura 4.11</b> Respostes del motor de cua i del seu model a diferents entrades .....	85
<b>Figura 4.12</b> Diagrama de blocs SIMULINK per a la identificació dels paràmetres del motor principal .....	86
<b>Figura 4.13</b> Captures en el tacòmetre del motor principal.....	88
<b>Figura 4.14</b> Captures amb el tacòmetre òptic de la velocitat de les pales del motor principal en funció de la resposta de cada graó en RP .....	88
<b>Figura 4.15</b> Captures de la velocitat de les pales del motor principal en funció de cada graó.....	89
<b>Figura 4.16</b> Captures del tacòmetre principal després del processament.....	90
<b>Figura 4.17</b> Respostes al graó d'1 V del motor principal i del seu model .....	91
<b>Figura 4.18</b> Respostes del motor principal i del seu model al graons de diferent amplitud.....	92
<b>Figura 4.19</b> Respostes del motor principal i del seu model a diferents entrades .....	93
<b>Figura 4.20</b> Diagrama de blocs SIMULINK per a la identificació estàtica en el pla vertical .....	96
<b>Figura 4.21</b> Comparativa entre el senyal capturat i el senyal processat.....	97
<b>Figura 4.22</b> Respostes del TRMS (en gris) i del model (en verd) des de diferents angles de capcineig inicials .....	98
<b>Figura 4.23</b> Diagrama de blocs SIMULINK per a la identificació dinàmica directa en el pla vertical.....	99
<b>Figura 4.24</b> Respostes del TRMS als graons per a la identificació vertical directa.....	101
<b>Figura 4.25</b> Ajustament polinòmic dels paràmetres $k_{fvp}$ i $k_{fvm}$ per mínims quadrats .....	102
<b>Figura 4.26</b> Respostes del TRMS i del model en la identificació dinàmica directa en el PV .....	103
<b>Figura 4.27</b> Comparativa entre les respostes del TRMS i les del model per a la IDD en el PV .....	104
<b>Figura 4.28</b> Influència del rotor de cua sobre el moviment vertical .....	105
<b>Figura 4.29</b> Diagrama de blocs SIMULINK per a la identificació dinàmica creuada en el pla vertical .....	106
<b>Figura 4.30</b> Ajustament polinòmic del paràmetre $J_r$ per mínims quadrats.....	108
<b>Figura 4.31</b> Respostes del TRMS i del model en la identificació vertical creuada.....	109
<b>Figura 4.32</b> Diagrama de blocs SIMULINK per a la identificació estàtica en el pla horitzontal .....	111

<b>Figura 4.33</b> Detall de les falques en el pivot bloquejant el moviment vertical .....	112
<b>Figura 4.34</b> Diverses captures del moviment del TRMS amb $\alpha_v = -0.6912$ i $\alpha_v = 0$ quan retorna lliurement a la seva posició de repòs horitzontal .....	113
<b>Figura 4.35</b> Respostes del TRMS (en gris) i del model (en blau) quan es deixa caure des d'un angle positiu i des d'un negatiu .....	114
<b>Figura 4.36</b> Diagrama de blocs SIMULINK per a la identificació dinàmica directa en el pla horitzontal .....	115
<b>Figura 4.37</b> Respostes en el pla horitzontal del TRMS a $\alpha_v = 0$ .....	116
<b>Figura 4.38</b> Ajustament polinòmic dels paràmetres $k_{fhp}$ i $k_{fhv}$ per mínims quadrats .....	118
<b>Figura 4.39</b> Respostes del TRMS (en negre) i del model (en vermell) a diferents graons d'entrada.....	119
<b>Figura 4.40</b> Comparativa entre les respostes del TRMS i les del model per a la IDD en el PH .....	119
<b>Figura 4.41</b> Diagrama de blocs SIMULINK per a la identificació dinàmica creuada en el pla horitzontal .....	120
<b>Figura 4.42</b> Conservació del moment angular (Tipler i Mosca 2005a).....	121
<b>Figura 4.43</b> Respostes del moviment horitzontal del TRMS a diferents graons aplicats en el motor principal.....	122
<b>Figura 4.44</b> Ajustament polinòmic del paràmetre $J_{rm}$ per mínims quadrats .....	124
<b>Figura 4.45</b> Respostes en el pla horitzontal del TRMS i del model per a diferents graons d'entrada al motor principal .....	124
<b>Figura 4.46</b> Respostes del TRMS a l'entrada d'un graó (motor principal i $t = 0$ s) i d'un senyal sinusoidal (motor de cua i $t = 50$ s).....	127
<b>Figura 4.47</b> Ajustament de les respostes del TRMS (en gris) i del model (en magenta) després de l'optimització .....	127
<b>Figura 4.48</b> Respostes del model (en vermell) i del TRMS (en blau) a les entrades dels modes 1, 7 i 8.....	128
<b>Figura 4.49</b> Respostes del model (en vermell) i del TRMS (en blau) a les entrades dels modes 11, 13 i 16.....	129
<b>Figura A.1</b> Tacòmetre òptic de mà PCE-DT 62.....	154





## Llistat de taules

<b>Taula 3.1</b> Paràmetres físics del TRMS (Christensen <i>et al.</i> 2006).....	25
<b>Taula 3.2</b> Valors originals dels paràmetres dels models dels motors CC.....	37
<b>Taula 3.3</b> Moments d'inèrcia del TRMS respecte a l'eix horitzontal.....	52
<b>Taula 3.4</b> Moments d'inèrcia del TRMS respecte a l'eix vertical.....	56
<b>Taula 4.1</b> Paràmetres i llurs valors inicials per a la identificació del motor de cua.....	79
<b>Taula 4.2</b> Paràmetres del model del motor de cua i llurs valors originals i ajustats (en negreta).....	84
<b>Taula 4.3</b> Criteris de validació per al motor de cua.....	85
<b>Taula 4.4</b> Paràmetres i llurs valors inicials per a la identificació del motor principal.....	87
<b>Taula 4.5</b> Paràmetres del model del motor principal i llurs valors originals i ajustats (en negreta).....	92
<b>Taula 4.6</b> Criteris de validació per al motor principal.....	93
<b>Taula 4.7</b> Comparativa dels paràmetres d'ambdós motors.....	94
<b>Taula 4.8</b> Paràmetres i valors inicials en la identificació estàtica en el PV.....	96
<b>Taula 4.9</b> Paràmetres del model (estàtica pla vertical) i llurs valors originals i ajustats (en negreta).....	98
<b>Taula 4.10</b> Paràmetres i valors inicials de la identificació dinàmica directa en el PV.....	100
<b>Taula 4.11</b> Paràmetres del model (directa pla vertical) i llurs valors originals i ajustats.....	103
<b>Taula 4.12</b> Criteris de validació de la identificació dinàmica directa en el pla vertical.....	104
<b>Taula 4.13</b> Paràmetres del model (dinàmica creuada vertical) i llurs valors originals i ajustats.....	109
<b>Taula 4.14</b> Paràmetres i valors inicials de la identificació dinàmica directa en el PV.....	111
<b>Taula 4.15</b> Paràmetres del model (estàtica horitzontal) i llurs valors originals i ajustats.....	114
<b>Taula 4.16</b> Paràmetres i valors inicials de la identificació dinàmica directa en el PH.....	115
<b>Taula 4.17</b> Paràmetres del model (dinàmica directa horitzontal) i llurs valors originals i ajustats.....	118
<b>Taula 4.18</b> Criteris de validació de la identificació dinàmica directa en el pla horitzontal.....	120
<b>Taula 4.19</b> Paràmetres del model (dinàmica creuada horitzontal) i llurs valors originals i ajustats.....	125
<b>Taula 4.20</b> Paràmetres dels moments de força identificats i llurs valors originals i ajustats.....	128
<b>Taula 4.21</b> Modes d'excitació dels motors per a la validació global.....	128



## Llistat de símbols

Paràmetre	Descripció	Unitat
$m_{mr}$	Massa del rotor i motor CC principals	kg
$m_{rp}$	Massa del rotor principal	kg
$m_{tr}$	Massa del rotor i motor CC de cua	kg
$m_{rc}$	Massa del rotor de cua	kg
$m_{ms}$	Massa del protector principal	kg
$m_{ts}$	Massa del protector de cua	kg
$m_m$	Massa de la barra principal	kg
$m_t$	Massa de la barra de cua	kg
$m_{cb}$	Massa del contrapès	kg
$m_b$	Massa de la barra del contrapès	kg
$l_m$	Longitud de la barra principal	m
$l_t$	Longitud de la barra de cua	m
$l_b$	Longitud de la barra del contrapès	m
$l_{cb}$	Distància entre el pivot i el contrapès	m
$r_{ms}$	Radi del protector principal	m
$r_{ts}$	Radi del protector de cua	m
$l_{mw}$	Amplada de la pala del rotor principal	m
$l_{ml}$	Llargada de la pala del rotor principal	m
$l_{tw}$	Amplada de la pala del rotor de cua	m
$l_{tl}$	Llargada de la pala del rotor de cua	M
$\alpha_v$	Angle de capcineig ( <i>pitch</i> )	rad
$\alpha_h$	Angle de guinyada ( <i>yaw</i> )	rad
$\dot{\alpha}_v$	Velocitat de capcineig	rad/s
$\dot{\alpha}_h$	Velocitat de guinyada	rad/s

Paràmetre	Descripció	Unitat
$U_v$	Voltatge d'entrada al motor principal (entorn SIMULINK)	V
$U_h$	Voltatge d'entrada al motor de cua (entorn SIMULINK)	V
$V_v$	Voltatge d'entrada al motor principal (entorn real)	V
$V_h$	Voltatge d'entrada al motor de cua (entorn real)	V
$G_v$	Guany de l'etapa preliminar del motor principal	
$G_h$	Guany de l'etapa preliminar del motor de cua	
$\omega_m$	Velocitat de gir del rotor principal	rad/s
$\omega_t$	Velocitat de gir del rotor de cua	rad/s



## Annex A. Característiques tècniques

### A.1. Tacòmetre òptic

Del manual d'instruccions d'ús del tacòmetre òptic de mà PCE-DT 62, a continuació es detallen les característiques i especificacions tècniques.

#### A.1.1. Característiques

- Este tacómetro digital proporciona una rápida y precisa medición sin contacto de RPM así como mediciones de la velocidad de la superficie en objetos rotatorios.
- Este tacómetro usa la técnica CPU, la técnica fotoeléctrica y la técnica de unión de laser combinado con otro aparato como el Tacómetro Fotoeléctrico (RPM &REV).
- Dos modos de prueba:
  - Modo de velocidad de rotación (unidad: RPM)
  - Modo de contar (unidad: REV)
- Amplio rango de medición y alta resolución.
- Pantalla digital de LCD de alta resolución.
- Memoria integrada con grabación de los valores Max, Min y último valor guardado.

#### A.1.2. Especificacions tècniques

- Pantalla: Pantalla de LCD con 5 dígitos LCD.
- Precisión:  $\pm(0.05\%+1 \text{ dígitos})$ .
- Rango de RPM: De 2 hasta 99,999RPM
- Rango contador: De 1 hasta 99,999 REV.
- Resolución: 0.1 RPM (2 hasta 999.9 RPM) y 1 RPM. (sobre 1000 RPM)
- Tiempo de muestreo: 0.5 seg. (sobre 1000 RPM)
- Distancia de detección: De 50mm hasta 500 mm.
- Base de tiempo: Cristal de cuarzo
- Consumo: Aprox. 45mA
- Alimentación: Batería de 9V o 6V de corriente continua exterior.
- Temperatura de uso: De 0 hasta 50 °C.

- Dimensiones: 160x58x39mm.
- Peso: 151g



**Figura A.1** Tacòmetre òptic de mà PCE-DT 62

## **A.2. Hèlices Graupner**

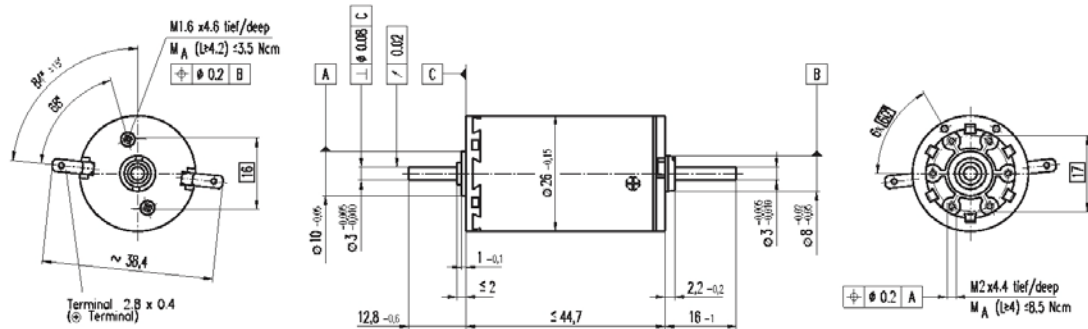
En cada rotor hi ha situades dues hèlices rígides bipala de la casa alemanya Graupner. Per al rotor principal, el diàmetre de les hèlices és de 28 cm (11 polzades), mentre que per al rotor de cua, el diàmetre ascendeix a 16 cm (7 polzades).

## **A.3. Motors A-max i tacòmetre DCT-22**

En les pàgines següents es mostren les especificacions tècniques del motor CC model A-max 110950 i del tacòmetre model DCT-22 de la casa Maxon Motor.

**A-max 26** Ø26 mm, Graphite Brushes, 6 Watt

maxon A-max



- Stock program  
■ Standard program  
■ Special program (on request!)

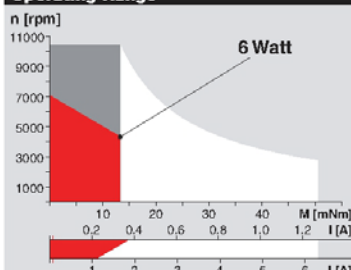
**Order Number**

Motor Data	110946	110947	110948	110949	110950	110951	110952	110953	110954	110955	110956	110957
1 Assigned power rating	W	6.0	6.0	6.0	6.0	6.0	6.0	6.0	6.0	6.0	6.0	6.0
2 Nominal voltage	Volt	7.2	9.0	12.0	12.0	18.0	18.0	24.0	24.0	30.0	36.0	48.0
3 No load speed	rpm	9370	10100	10100	8350	8300	7450	8630	7910	8850	8480	8220
4 Stall torque	mNm	38.2	39.7	52.7	43.8	45.6	41.0	43.5	38.1	47.9	46.4	43.7
5 Speed / torque gradient	rpm / mNm	260	268	198	197	186	186	203	213	188	186	191
6 No load current	mA	89	78	57	46	30	26	23	21	19	15	13
7 Starting current	mA	5500	4900	4800	3290	2250	1820	1670	1340	1510	1160	911
8 Terminal resistance	Ohm	1.31	1.84	2.50	3.65	8.00	9.91	14.4	17.9	19.9	31.0	46.1
9 Max. permissible speed	rpm	10400	10400	10400	10400	10400	10400	10400	10400	10400	10400	10400
10 Max. continuous current	mA	1080	1080	1080	1070	732	660	548	493	466	374	307
11 Max. continuous torque	mNm	7.49	8.74	11.9	14.3	14.8	14.9	14.3	14.0	14.8	14.9	14.8
12 Max. power output at nominal voltage	mW	8330	9630	13000	9020	9540	7710	9550	7670	10900	10100	9240
13 Max. efficiency	%	70	72	76	75	77	76	77	76	78	78	75
14 Torque constant	mNm / A	6.94	8.09	11.0	13.3	20.2	22.5	26.0	28.3	31.8	39.9	48.0
15 Speed constant	rpm / V	1380	1180	869	718	472	423	367	337	300	239	199
16 Mechanical time constant	ms	32	29	27	26	24	24	24	24	23	23	23
17 Rotor inertia	gcm <sup>2</sup>	11.9	10.5	13.0	12.6	12.4	12.3	11.2	10.6	11.8	11.8	11.1
18 Terminal inductance	mH	0.10	0.14	0.25	0.37	0.86	1.07	1.42	1.69	2.13	3.35	4.85
19 Thermal resistance housing-ambient	K / W	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13
20 Thermal resistance rotor-housing	K / W	3.2	3.2	3.2	3.2	3.2	3.2	3.2	3.2	3.2	3.2	3.2
21 Thermal time constant winding	s	11	10	12	12	12	12	11	10	11	11	10

**Specifications**

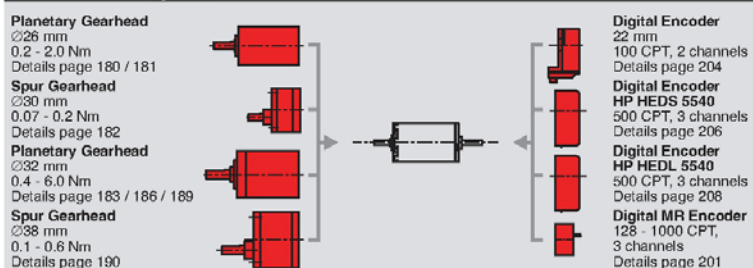
- Axial play 0.1 - 0.2 mm
- Max. **ball bearing** loads
  - axial (dynamic) 5.0 N
  - radial (5 mm from flange) 20.5 N
  - Press-fit force (static) 75 N
  - (static, shaft supported) 1200 N
- Max. **sleeve bearing** loads
  - axial (dynamic) 1.7 N
  - radial (5 mm from flange) 5.5 N
  - Press-fit force (static) 80 N
  - (static, shaft supported) 1200 N
- Radial play **ball bearing** 0.025 mm
- Radial play **sleeve bearing** 0.012 mm
- Ambient temperature range -30 / +85°C
- Max. rotor temperature +125°C
- Number of commutator segments 13
- Weight of motor 100 g
- Values listed in the table are nominal. For applicable tolerances (see page 43). For additional details please use the maxon selection program on the enclosed CD-Rom.

118 maxon DC motor

**Operating Range****Comments**

- Details on page 49
- **Recommended operating range**
  - **Continuous operation**  
In observation of above listed thermal resistances (lines 19 and 20) the maximum permissible rotor temperature will be reached during continuous operation at 25°C ambient.  
= Thermal limit.
  - **Short term operation**  
The motor may be briefly overloaded (recurring).

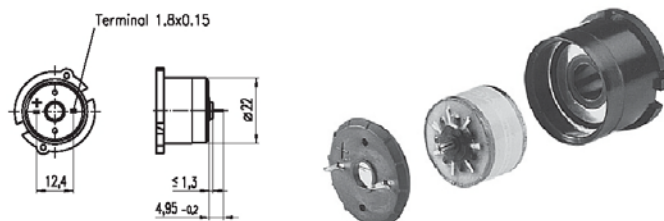
- 110955 Motor with high resistance winding
- 110947 Motor with low resistance winding

**maxon Modular System**

April 2002 edition / subject to change

## DC-Tacho DCT 22, 0.52 Volt

maxon sensor



- ☒ Programa Stock  
☐ Programa Estándar  
☐ Programa Especial (previo encargo)

### Números de Referencia

118908      118909      118910

### Tipo

Diámetro de eje (mm)

2

3

4



### Sistema Modular maxon

* Motor	Página	* Reductor	Página	Longitud total [mm]	/	• ver reductor
RE 25	77/79			76.8		
RE 25	77/79	GP 26, 0.5 - 2.0 Nm	228			
RE 25	77/79	GP 32, 0.75 - 4.5 Nm	230/231			
RE 25	77/79	GP 32, 0.75 - 6.0 Nm	233			
RE 25	77/79	GP 32, 1.0 - 4.5 Nm	236			
RE 25	77/79	GP 32 S	249-251			
RE 25	78			65.3		
RE 25	78	GP 26, 0.5 - 2.0 Nm	228			
RE 25	78	GP 32, 0.75 - 4.5 Nm	230/231			
RE 25	78	GP 32, 0.75 - 6.0 Nm	233			
RE 25	78	GP 32, 1.0 - 4.5 Nm	236			
RE 25	78	GP 32 S	249-251			
RE 35, 90 W	81					89.1
RE 35, 90 W	81	GP 32, 0.75 - 4.5 Nm	230			
RE 35, 90 W	81	GP 32, 0.75 - 6.0 Nm	232/233			
RE 35, 90 W	81	GP 32, 8 Nm	235			
RE 35, 90 W	81	GP 42, 3.0 - 15 Nm	238			
RE 35, 90 W	81	GP 32 S	249-251			

### Datos técnicos

Tensión de salida por cada 1000 rpm	0.52 V	Máx. corriente recomendada	10 mA
Resistencia en bornes tacho	37.7 Ω	Tolerancia de la tensión de salida	± 15 %
Rizo típico pico a pico	± 6 %	Inercia del rotor (sólo tacodinamo)	< 3 gcm <sup>2</sup>
Frecuencia de rizo por vuelta	14	Frec. de resonancia con motores en pág. 77 - 79	> 2 kHz
Linealidad entre 500 y 5000 rpm en vacío	± 0.2 %	con motores en pág. 81	> 4.5 kHz
Linealidad con carga resistiva de 10 kΩ	± 0.7 %	Rango de temperaturas	-20 ... +65 °C
Error en inversión	± 0.1 %		
Coefficiente de temperatura de FEM (imán)	-0.02 % / °C	Opción: cablecillos en lugar de terminales para soldar	
Coefficiente de temperatura de la resistencia de la bobina	+0.4 % / °C		

### Ejemplo de conexión

